ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 222 – Pubblicato il 06 – 03 – 2017

L'analisi infinitesimale mediante i numeri euclidei

Una introduzione elementare

di Vieri Benci [*]

[*Segue dal numero* 221]

3.7 Differenziabilità

Definizione 3.16 *Una funzione (standard) si dice differenziabile in un punto standard x se per ogni infinitesimo ε, esiste un numero df(x) ∈ ℝ tale che*

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+df(x)\,\varepsilon+\theta_\varepsilon\varepsilon \qquad (16)$$

ove θ_ε è un infinitesimo (che può dipendere da ε). L'espressione $df(x)\varepsilon$ si chiama differenziale della f nel punto x.

Una funzione si dice di classe C^1 se essa stessa e la sua funzione derivata sono continue. Le funzioni di classe C^1 godono di buone proprietà alcune delle quali saranno esaminate in questo paragrafo. La prima proprietà deriva dal teorema fondamentale del calcolo e può essere espressa mediante questa relazione; se f è di classe C^1, allora

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt \qquad (17)$$

(la dimostrazione di questo fatto è quella usuale e pertanto sarà omessa).

La differenziabilità è un'altra di queste proprietà:

Teorema 3.17 *Se f è una funzione standard di classe C^1, allora essa è differenziabile e si ha che*

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+f'(x)\,\varepsilon+\theta_\varepsilon\,\varepsilon\,,\quad \theta_\varepsilon\sim 0 \qquad (18)$$

ovvero il differenziale della f è dato da $df(x)\,\varepsilon=f'(x)\,\varepsilon$.

Dimostrazione: Sfruttando la (17) si ha che

$$\begin{aligned} f(x+\varepsilon)&=f(a)+\int_a^{x+\varepsilon} f'(t)\,dt\\ &=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt+\int_x^{x+\varepsilon} f'(t)\,dt\\ &=f(x)+\int_x^{x+\varepsilon} f'(x)\,dt+\int_x^{x+\varepsilon} h(t)\,dt\\ &=f(x)+f'(x)\varepsilon+\int_x^{x+\varepsilon} h(t)\,dt\end{aligned}$$

ove si è posto $h(t)=f'(t)-f'(x)$.

Poiché f' è continua, $h(t)$ è una funzione infinitesima in $[x,x+\varepsilon]$ e dunque il numero

$$\theta_\varepsilon:=\frac{\int_x^{x+\varepsilon} h(t)\,dt}{\varepsilon}$$

risulta infinitesimo per il teorema 3.11 (iv).

Il teorema 3.17 ci dice che una condizione sufficiente per la differenziabilità di una funzione in un punto x è la continuità di $f'(t)$, mentre, è facile verificare che l'esistenza della derivata è necessaria ma non sufficiente a garantire la differenziabilità.

Osservazione 3.18 (Per gli insegnanti) *Avendo definito la derivata mediante la (12), risulta che la derivabilità non implica la differenziabilità: questo fatto mi sembra didatticamente utile in quanto permette di distinguere la derivabilità dalla differenziabilità, cosa che nella matematica tradizionale capita solo per funzioni di più variabili.*

Da questo punto in poi, i principali teoremi del calcolo (Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy etc.) non si discostano molto dalle dimostrazioni tradizionali e si potrebbero seguire gli enunciati di un qualunque testo di ANS (richiedendo la differenziabilità quando la derivata nel senso della definizione 3.2 non è sufficiente). E tutto sommato, in questa parte del calcolo, la differenza tra i metodi standard ed i metodi non-standard non è così rilevante. A titolo di esempio dimostreremo il teorema di Fermat.

Teorema 3.19 *Sia data una funzione standard differenziabile definita in un intervallo aperto; allora nei punti di massimo e minimo la derivata si annulla.*

Dimostrazione: Sia x_0 un punto di minimo e sia $\varepsilon>0$ un infinitesimo; allora

$f(x_0)\le f(x_0+\varepsilon)$,

per cui, dal teorema del differenziale segue che

$f(x_0)\le f(x_0)+f'(x_0)\,\varepsilon+\theta_\varepsilon\,\varepsilon$

ovvero

$f'(x_0)\,\varepsilon+\theta_\varepsilon\,\varepsilon\ge 0$;

dividendo per ε si ha

$f'(x_0)+\theta_\varepsilon\ge 0$,

per cui prendendo la parte standard dei due termini ottengo

$f'(x_0)\ge 0$.

Ragionando in modo simile con $-\varepsilon$ si ha

$f(x_0)\le f(x_0)-f'(x_0)\,\varepsilon-\theta_{-\varepsilon}\,\varepsilon$

per cui

$-f'(x_0)\varepsilon-\theta_{-\varepsilon}\,\varepsilon\ge 0$.

Dividendo per $-\varepsilon$ si ha

$f'(x_0)+\theta_{-\varepsilon}\le 0$

e quindi, prendendo la parte standard, $f'(x_0)\le 0$. Da questa disuguaglianza e dalla (19) segue che $f'(x_0)=0$.

———

Note: Questo lavoro è stato presentato, in parte, in occasione della 6° giornata di NSA tenutasi a Lucca l'01 - 10 – 2016.

References: [B.1] Benci V., *I numeri e gli insiemi etichettati*, Conferenza del seminario di matematica dell'Università di Bari, vol. 261, Laterza, (1995), pp. 1-29. [B.2] Benci V., Di Nasso M., *Numerosities of labelled sets: a new way of counting*, Advances in Mathematics, vol. 173, (2003), pp. 50-67. [B.3] Benci V., Di Nasso M. Forti M., *An Aristotelian notion of size*, Ann. Pure Appl. Logic, 143, (2006) pp.43-53. [B.4] Benci V., Forti M., *The Euclidean numbers*, arXiv:1702.04163. [B.5] Benci V., Freguglia P., *Alcune osservazioni sulla matematica non archimedea*, Matem. Cultura e Soc., RUMI, 1 (2016), 105–122. [B.6] Benci V., Luperi Baglini L., *Ultrafunctions and applications*, Disc. Cont. Dynamical systems, series S, vol. 7, No. 4, (2014), arXiv:1405.4152. [B.7] Benci V., Horsten L., Wenmackers S., *Infinitesimal probabilities,* Brit. J. Phil. Sci. (2016), 1-44, doi: 10.1093/bjps/axw0 13. [B.8] Cutland N., *Nonstandard Measure Theory and its Applications*, Bulletin of the London Mathematical Society, 15, (1983), pp. 529-589. [B.9] Euclid, *The Elements*, (T. L. Heath translator), 2nd edition (reprint), Dover, New York, 1956. [B.10] Keisler H. J., *Foundation of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, (1976). [This book is now freely downloadable at: http://www .math.wisc.edu/~keisler/foundations .html]. [B.11] Levi-Civita T., *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Venezia (Serie 7), (1892-1893), 1765-1815; ripubblicato in: Opere, vol. 1, pp. 1-39. [B.12] Robinson A., *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, (1966). [B.13] Veronese G., *Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede*, Memorie della Reale Accademia dei Lincei, Atti della Classe di Scienze Naturali, Fisiche e Matematiche 4, (1889), 603-624.

[*] Professore ordinario di Analisi Matematica - Università degli Studi di Pisa – email: vieri.benci@unipi.it

Cubo di Rubik: alcuni spunti

(*di Luciano Corso*) Il cubo di Rubik classico (3 × 3 × 3), è noto. È costituito da 27 cubetti più piccoli; tutti uguali di forma, ma che presentano diversi colori sulle loro facce. I cubetti si distinguono per la posizione che occupano nello spazio del cubo. Abbiamo 8 cubetti di vertice che presentano sempre le stesse 3 facce visibili con 3 colori distinti e possono essere mossi solo in spazi di vertice. Abbiamo poi 12 cubetti di spigolo che presentano 2 facce visibili con colori distinti e possono essere mossi solo in spazi di spigolo. Abbiamo, inoltre, 6 cubetti centrali che presentano una sola faccia e quindi un solo colore. Abbiamo infine un cubetto virtuale centrale che non fa vedere alcuna faccia. Le facce dei cubetti centrali e quelle del cubetto invisibile all'interno del cubo sono calettate e quindi non concorrono alla combinatoria del cubo di Rubik. Le facce del cubo, quando il cubo è risolto, presentano 6 colori diversi formati dalla unione delle facce dei cubetti che ne compongono il colore.

Pertanto, i cubetti mobili (e quindi le rispettive facce) possono essere collocati in 20 posizioni possibili. Queste posizioni sono: $\Gamma = \{(O, Y, B), (B, Y, R), (R, Y, G), (G, Y, O), (O, B, G), (G, W, R), (R, W, B), (B, W, O), (O, V), (V, R), (R, B), (B, O), (Y, O), (O, W), (W, R), (G, Y), (Y, O), (G, W), (W, B), (B, Y)\}$, dove le lettere in inglese (quelle in grassetto delle seguenti parole: **B**lue, **G**reen, **O**range, **R**ed, **Y**ellow, **W**hite) identificano sinteticamente i colori dei diversi cubetti che formano le facce visibili del cubo.

I cubi di vertice, quindi, vanno a finire in tutti i modi possibili negli spazi di vertice e ci sono 8! modi di metterli. Inoltre, poiché i cubetti di vertice hanno 3 facce visibili che non possono essere scambiate sul cubetto di vertice ma solo ruotate, ci sono 3 modi di porle per ogni spazio di vertice. Poiché gli spazi di vertice sono 8, ci sono 3^{8-1} modi di collocarli negli spazi di vertice essendo l'ultimo cubetto obbligatoriamente collocabile in un sol modo. Ragionamento analogo si deve fare per i cubetti di spigolo. Ci sono 12! modi di collocarli negli spazi di spigolo. Poi ci sono 2 faccette per ogni spigolo che possono andare solo in 2 modi diversi per ogni collocazione di spigolo. Allora sono 2^{12-1} i modi di collocare i due colori delle faccette dei cubetti di spigolo negli spazi di spigolo, essendo, anche in questo caso, l'ultima faccetta obbligatoriamente posizionata in un solo modo.

In totale, perciò, le combinazioni possibili nel posizionamento delle faccette dei cubetti che formano il cubo di Rubik negli spazi corrispondenti sono $8!\cdot 3^7\cdot 12!\cdot 2^{11}$, ma non è finita. Ogni permutazione può essere vista come un n-ciclo e può essere scomposta in un prodotto di 2-cicli. Per teorema, i fattori di questo prodotto sono un numero pari e provengono da n-cicli dispari e perciò ogni arrangiamento può essere ottenuto in due modi distinti: o con un ciclo lungo n o con un prodotto di fattori pari di ciclo 2. Si arriverebbe comunque alla risoluzione finale. Così, il numero di combinazioni possibili è uguale a quello visto sopra diviso per 2. Quindi le possibili configurazioni del cubo di Rubik sono:

$(8!\cdot 3^7\cdot 12!\cdot 2^{11}) / 2 = 43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000.$

Osserviamo che ognuno di questi arrangiamenti è un possibile stato del cubo. Sia S l'insieme di questi stati e s_0 uno stato iniziale. L'applicazione che manda, dopo ogni composizione di mosse elementari, da uno stato iniziale s_0 a uno stato finale s_n genera dopo n passi un'orbita di un sistema dinamico.

Il cubo di Rubik origina un gruppo algebrico, detto gruppo di Rubik. Un gruppo è una struttura algebrica costituita da un insieme di oggetti matematici, detto sostegno della struttura (qui lo noteremo con "X"), e da una legge di composizione interna "$\circ$" che deve essere associativa, ammettere elemento neutro e inverso in X. La struttura si scrive in modo elementare così: $\{X, \circ\}$. Se l'operazione "$\circ$" è commutativa, allora si dice che il gruppo è abeliano (o commutativo). Identifichiamo nel cubo di Rubik gli elementi del sostegno e l'operazione interna che danno alla struttura la forma di gruppo.

Nel processo di formazione delle facce del cubo di Rubik mediante la rotazione di gruppi di cubetti notiamo che sono 6 le rotazioni possibili in ogni mossa e ogni mossa elementare è di 1 / 4 di giro, cioè di π / 2 radianti, e sono infine 8 i cubetti che si muovono in ogni mossa; inoltre, ci si può muovere in due modi diversi: in senso orario e antiorario. Se posizioniamo il cubo davanti a noi, stabiliamo che le sei rotazioni elementari possibili in senso orario sono: *CR* = {***U****p*, ***D****own*, ***R****ight*, ***L****eft*, ***F****ront*, ***B****ack*}, dove ***U****p* = "ruoto i cubetti della faccia superiore del cubo", ***Down*** = "ruoto i cubetti della faccia inferiore del cubo", ***R****ight* = "ruoto i cubetti della faccia destra del cubo" e così via. Ogni rotazione elementare è una mossa, ma le mosse possono essere costituite da composizioni di rotazioni elementari. Chiamiamo gruppo di Rubik l'insieme di tutte le possibili mosse che si possono eseguire (identificando le mosse che portano alla stessa configurazione del cubo). L'operazione interna "$\circ$" è proprio la composizione delle mosse. Con queste premesse si può dimostrare che la struttura è un gruppo algebrico non commutativo. Infatti, prese tre generiche mosse elementari x, y, z, l'operazione "$\circ$" ha la proprietà associativa:

1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \qquad \forall\, x, y, z$

ammette elemento neutro:

2) $x \circ id = id \circ x = x \qquad \forall\, x$

ammette inversa

3) $x \circ x^{-1} = id\,, \qquad \forall\, x$

dove se x è una rotazione elementare oraria allora x^{-1} è una rotazione elementare antioraria e viceversa. La struttura invece non è commutativa. Infatti

4) $x \circ y \neq y \circ x \qquad \exists\, x, y\,.$

Cubo alla mano, la verifica di queste proprietà è immediata.

Riferimenti bibliografici: [B.1] Ferraris S., *Configurazioni del cubo di Rubik, Calcolo delle orbite e delle permutazioni*, Laboratorio di Combinatorica, a. a. 2007-2008 UniTo, webmath2.unito.it/paginepersonali/romagnoli/rubik.pdf [ultimo accesso 24-02-2017]. [B.2] Davis T., *Group Theory via Rubik's Cube*, www.geometer.org/rubik/group.pdf, [ultimo accesso 24-02-2017]. [B.3] A cura del MIT, *The Mathematics of the Rubik's cub*e, March 17, 2009, web.mit.edu/sp.268/www/rubik.pdf.

Ogni caso

di Wisława Szymborska

Poteva accadere.
Doveva accadere.
È accaduto prima. Dopo.
Più vicino. Più lontano.
È accaduto non a te.
Ti sei salvato perché eri il primo.
Ti sei salvato perché eri l'ultimo.
Perché da solo. Perché la gente.
Perché a sinistra. Perché a destra.
Perché la pioggia. Perché un'ombra.
Perché splendeva il sole.
Per fortuna là c'era un bosco.
Per fortuna non c'erano alberi.
Per fortuna una rotaia, un gancio, una trave, un freno,
un telaio, una curva, un millimetro, un secondo.
Per fortuna sull'acqua galleggiava un rasoio.
In seguito a, poiché, eppure, malgrado.
Che sarebbe accaduto se una mano, una gamba,
a un passo, a un pelo
da una coincidenza.
Dunque ci sei?
Dritto dall'attimo ancora socchiuso?
La rete aveva solo un buco, e tu proprio da lì?
Non c'è fine al mio stupore, al mio tacerlo.
Ascolta
come mi batte forte il tuo cuore.

Tratto da Wisława Szymborska "La gioia di scrivere" – tutte le poesie (1945-2009), edizioni Adelphi, Milano, 2006.