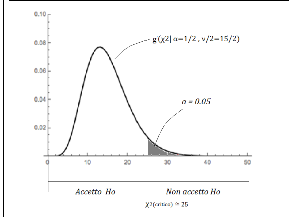
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente



Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 227 – Pubblicato il 02 – 08 – 2017

Sul calcolo della lunghezza dell'ellisse e sua applicazione alla determinazione della lunghezza dell'orbita terrestre

di Gianpaolo Zontini [*]

Sunto. Si dimostra una formula utile a valutare con buona approssimazione la lunghezza dell'ellisse. Detta formula è valida solo per piccoli valori dell'eccentricità, come nel caso dei pianeti del sistema solare; essa, però, risulta molto agevole nel calcolo rispetto al metodo classico della valutazione dell'integrale ellittico. Seguono l'applicazione della formula alla determinazione della lunghezza dell'orbita terrestre, anche con un'altra formula approssimata e la valutazione degli errori relativi percentuali commessi.

Abstract. We are here demonstrating a formula to estimate the ellipse length with a good approximation. This formula is only valid if applied to small values of eccentricity, as in the case of the planets of the solar system, but it is easier to calculate than the classical method for the evaluation of the elliptic integral. The formula is then applied to the determination of the length of the Earth orbit (also with another approximate formula) and the evaluation of percentage relative errors.

Per determinare la lunghezza L dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\quad a>b\,,$$

si può utilizzare, dopo aver esplicitato la variabile y, la formula

$$\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\;dx\,,$$

applicata all'arco di ellisse situato nel 1°quadrante, ottenendo

$$L=4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\,x^2}{a^2-x^2}}\;dx=4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-e^2\,x^2}{a^2-x^2}}\;dx$$

dove $e = c/a$ indica l'eccentricità.

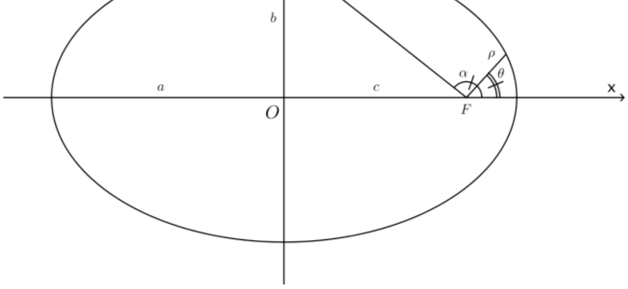


Figura 1

Con la sostituzione $x = a \sin t$, la relazione sopra assume l'aspetto

$$L=4a\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\,sin^2 t}\;dt \qquad (1)$$

L'integrale che compare nella formula (1) è un integrale ellittico completo di seconda specie, la cui primitiva non si può determinare per via elementare; lo si può valutare utilizzando metodi numerici o lo sviluppo in serie binomiale della funzione integranda: in entrambi i casi i metodi sono approssimati, forniscono però un valore per la lunghezza dell'ellisse con la precisione voluta, ma richiedono calcoli abbastanza laboriosi.

Un'alternativa, che semplifica notevolmente i calcoli, consiste nell'utilizzare una formula ottenuta integrando l'espressione dell'ellisse in coordinate polari con il polo in uno dei fuochi.

Questa formula, di seguito dimostrata, fornisce il valore voluto con una buona approssimazione solo se il valore dell'eccentricità e è molto piccolo, cioè dell'ordine dei centesimi, come accade per i pianeti del sistema solare (terra compresa avente $e = 0{,}0167$).

Per un'ellisse con centro nell'origine degli assi cartesiani, l'uso delle coordinate polari, con il polo in uno dei fuochi, porta all'espressione

$$\rho=\frac{p}{1+e\;\cos\vartheta}$$

dove $p = a - c\cdot e = a\,(1 - e^2)$.

In più, dalla figura si ha $\alpha = arctg(-b/c)$, $\cos\alpha = -c/a = -e$ e

$$tg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

Supponendo piccolo il valore dell'eccentricità, è possibile assimilare archi di ellisse con archi di cerchio, la cui lunghezza può essere valutata con $\rho\cdot d\vartheta$. La lunghezza L dell'ellisse è quindi approssimativamente

$$L\cong 4\int_0^\alpha \rho\;d\vartheta=4p\int_0^\alpha\frac{d\vartheta}{1+e\;\cos\vartheta}\,.$$

Per determinare una primitiva della funzione integranda si utilizza la sostituzione universale $t = \mathrm{tg}(\vartheta/2)$, da cui $\cos\vartheta = (1 - t^2) / (1 + t^2)$ e $d\vartheta = (2/(1+t^2))\,dt$; si ottiene

$$\int\frac{d\vartheta}{1+e\,cos\,\vartheta}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+e\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt=2\int\frac{dt}{1+e+(1-e)\,t^2}$$

$$=\frac{2}{1+e}\int\frac{dt}{1+\frac{1-e}{1+e}\,t^2}=\frac{2}{1+e}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\;t\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\;t\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot arctg\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot t=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot tg\,\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Dunque

$$\int_0^\alpha\frac{d\vartheta}{1+e\;\cos\vartheta}=\left|\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot arctg\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot tg\,\frac{\vartheta}{2}\right|_0^\alpha$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot arctg\;1=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\,\sqrt{1-e^2}}\,.$$

La lunghezza viene espressa da

$$L \cong 4\int_0^{\alpha} \rho\, d\vartheta = 4p\int_0^{\alpha} \frac{d\vartheta}{1+e\,\cos\vartheta} = 4p\,\frac{\pi}{2\sqrt{1-e^2}}$$

$$= \frac{2p\pi}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{2a(1-e^2)\pi}{\sqrt{1-e^2}} = 2a\pi\,\sqrt{1-e^2}\,. \qquad (2)$$

Nel caso dell'orbita terrestre (avente i parametri $a = 149{,}6 \cdot 10^6$ *km* ed $e = 0{,}0167$) il valore di L ottenuto con l'integrale ellittico (1), calcolato utilizzando *Derive*, è di 939898981,8 *km*, cioè circa 939898982 *km*, mentre con la formula (2) si ottiene L = 93980572,4 *km*, con un errore relativo percentuale di circa lo 0,007% rispetto al valore calcolato con (1). Un'altra semplificazione nel calcolo di L, che porta ad un integrale immediato, ma complica però la forma finale della formula ed aumenta notevolmente l'errore relativo percentuale, si ottiene trascurando nella funzione integranda il termine ($e \cdot \cos\vartheta$), che nel caso della terra risulta inferiore a 0,0167.

$$L \cong 4\int_0^{\alpha} \rho\, d\vartheta = 4p\int_0^{\alpha} \frac{d\vartheta}{1+e\cos\vartheta} \cong 4p\int_0^{\alpha} d\vartheta = 4p|\vartheta|_0^{\alpha}$$

$$= 4a(1-e^2)\alpha = 8a(1-e^2)\cdot arctg\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\quad . \qquad (3)$$

In questo caso, il valore trovato è L = 949692568,2 *km*, con un errore relativo percentuale di circa l'1,04 %, avendo assunto come valore vero per L quello calcolato con l'integrale ellittico.

[*] Rovereto (TN), e-mail: gpzontini@gmail.com

Un problema per i lettori

(*di L. Corso*) **Risoluzione**:

(*Segue dal n. 225*) Si dimostra che χ^2 ha una distribuzione di probabilità del tipo Gamma: $\mathrm{G}(\chi^2|\,\alpha = 1/2, \upsilon/2)$. Presentiamo la densità di probabilità e il grafico della distribuzione della variabile aleatoria χ^2

$$g\left(\chi^2\middle|\alpha = \frac{1}{2},\ \frac{\upsilon}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{2^{-\frac{\upsilon}{2}}\cdot e^{-\alpha\cdot\chi^2}\cdot(\chi^2)^{\left(\frac{\upsilon}{2}-1\right)}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\,, & \{\chi^2|\chi^2 \in \mathbb{R}^+\} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

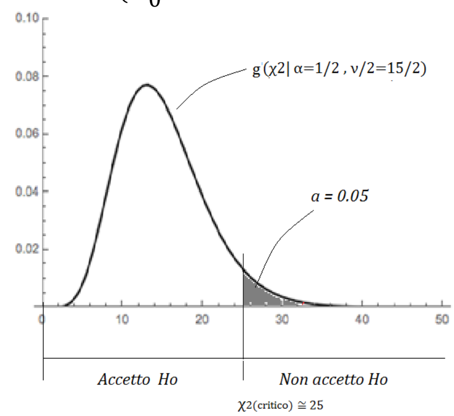


Figura 2. La funzione rappresentata rispetta i parametri del problema

Si fissano le due ipotesi alternative:

$$\begin{cases} H_0\colon\ n_{i,j} = \hat{n}_{i,j} & \forall\ i,j \\ H_1\colon\ n_{i,j} \neq \hat{n}_{i,j}\,, & \exists\ i,j \end{cases}$$

H_0 dichiara che non ci sono buone ragioni per dubitare che i 2 caratteri siano statisticamente indipendenti; H_1, dichiara il contrario, cioè che ci sono buone ragioni per credere che le differenze tra frequenze assolute osservate e teoriche siano dovute a fattori sistematici, non casuali quindi.

Il test d'ipotesi (induzione probabilistica) si basa sull'idea che tra i possibili valori di χ^2 ce ne sia uno, $\chi^2_{critico}$, in corrispondenza di una coda destra di $g(\chi^2|\,\alpha = 1/2,\ \upsilon/2)$ di area $\alpha = 0.05$, che divide la regione delle soluzioni possibili (nel nostro caso $\mathbf{R}^+$) in due parti: la regione di accettazione dell'ipotesi H_0 e quella di rifiuto di H_0 (e allora si accetta H_1):

Se il valore calcolato di χ^2 (nel nostro caso è 34.9067) cade nella regione di accettazione dell'ipotesi H_0 allora la si accetta e si conclude *che non ci sono buone ragioni per dubitare che i caratteri siano statisticamente indipendenti*; altrimenti si respinge H_0 e si conclude che *non ci sono buone ragioni per affermare che i due caratteri siano indipendenti statisticamente*. Si noti che il test si fa per valutare se esiste una dipendenza sistematica tra i due caratteri, diventando irrilevante l'aspetto casuale. Dobbiamo trovare quel valore di $\chi^2_{critico}$ che rispetti la condizione:

$$\int_0^{\chi^2_{critico}} \frac{2^{-\frac{\upsilon}{2}}\cdot e^{-\alpha\cdot\chi^2}\cdot\chi^{2\left(\frac{\upsilon}{2}-1\right)}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\cdot d\chi^2 = 0.95.$$

Con il programma Mathematica o con le opportune tavole si ottiene: $\chi^2_{cri}(\alpha = 0.05, \upsilon = 15) \cong 25$, dove $\upsilon = (r-1)\cdot(c-1) = (4-1)\cdot(6-1) = 15$ e r e c stanno rispettivamente per numero di righe e di colonne.

Si conclude che sulla base dei dati a disposizione l'ipotesi H_0 va respinta e perciò X e Y dimostrano una dipendenza sistematica, cioè non casuale.

3) Si calcolano le medie $M(.)$ e le varianze $V(.)$ di x e y e si compara la loro variabilità con i coefficienti di variazione $\upsilon(.)$ che, essendo numeri puri, permettono ciò: $M(x) = 63/16$, $V(x) = 1135/256$; $\upsilon(x) \cong 0.5348$; $M(y) = 53/16$, $V(y) = 535/256$, $\upsilon(y) \cong 0.4364$. La variabile x presenta una maggiore variabilità di y.

4) Le medie aritmetiche condizionate sono rispettivamente $M(x|y{=}4) = 24/5$, $M(y|x{=}2) = 2$.

5) Conviene calcolare la covarianza di x e y con il metodo indiretto: $C(x,y) = M(x\cdot y) - M(x)\cdot M(y) = 709/256$, poi si calcola il coefficiente di correlazione lineare: $r(x,y) = C(x,y)/(\sqrt{V(x)})\cdot(\sqrt{V(y)}) \cong 0.91$. Quest'ultimo risultato dimostra che le due variabili hanno una forte correlazione lineare positiva (è noto che $-1 \leq r(.,.) \leq +1$).

6) A questo punto siamo indotti a determinare la retta di regressione (interpolante a minimi quadrati) considerando x come variabile indipendente e y dipendente: $\hat{y} = a + b\cdot x$; si ottiene: $a = 968/1135$ e $b = 709/1135$. "a" e "b" si possono ottenere (più facilmente) anche dalle seguenti relazioni strettamente statistiche: $a = M(y) - b\cdot M(x)$ e $b = C(x,y)/V(x)$. La dimostrazione (facile) è lasciata al lettore.

7) Gli indici che scegliamo per misurare la bontà dell'accostamento fatto tra un modello interpolante teorico e il fenomeno osservato sono due, a seconda che si voglia una misura buona in generale o una misura specifica per modelli lineari. Per modelli qualsiasi si usa il coefficiente di variazione così definito:

$$I_2 = \sigma_{\hat{y}}/M(\hat{y}) = \left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}\right)\bigg/\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\hat{y}_i\right)$$

Il valore che si ottiene nel nostro caso è $I_2 \cong 0.1811$. È una misura relativa buona per comparazioni. Si conviene, comunque, che un modello teorico sia bene accostato ai dati sperimentali se I_2 è molto basso (in generale, minore di 0.1). Valuterei più che sufficiente il valore ottenuto. Invece, per modelli lineari si usa come misura del grado di accostamento il coefficiente di determinazione che, nel nostro caso è: $r^2 \cong 0.8277$. Il valore è alto ($0 \leq r^2 \leq 1$) e quindi la retta può essere considerata un buon modello di rappresentazione del fenomeno osservato.

8) Presentiamo, infine, il grafico 3 che descrive il comportamento dei dati sperimentali e il modello teorico interpolato. L'area di ogni punto corrisponde al valore della frequenza assoluta associata a ogni coppia (x, y) osservata.

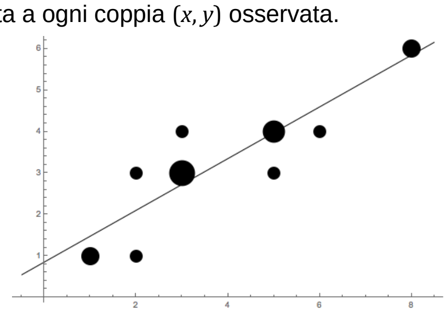


Fig. 3