ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 228 – Pubblicato il 04 – 09 – 2017

INSIEMI CONVESSI CON COMPLEMENTO CONVESSO

Giangiacomo Gerla [*], Annamaria Miranda [**]

1. Una congettura

Nel Forum di *Matematicamente* (da *dissonance*, messaggio 1340, 21-02-2009) [B.5] si è discusso intorno alla seguente questione:

Domanda: Sappiamo che un semipiano è convesso ed il suo complementare è esso stesso convesso. Il semipiano è l'unica figura piana con questa proprietà? Dalla discussione sembra che tutti siano convinti che in qualche modo la risposta da dare sia positiva e, quindi, che emerga la seguente **congettura**: *Una figura geometrica è un semipiano se e solo se è convessa e il suo complemento è ancora una figura convessa*. Tuttavia, nella discussione emergono alcune difficoltà e alcuni controesempi. In questo articolo tentiamo di affrontare la questione.

Ricordiamo che un insieme F di punti si dice *convesso* se contiene tutti i segmenti i cui estremi appartengono ad F. Data una retta r di equazione $a\,x + b\,y + c = 0$, chiamiamo *semipiani chiusi determinati da* r i due insiemi $F_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\text{: } a\,x + b\,y + c \geq 0\}$ e $G_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\text{: } a\,x + b\,y + c \leq 0\}$. Chiamiamo *semipiani aperti determinati da* r i due insiemi $F_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\text{: } a\,x + b\,y + c > 0\}$ e $G_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\text{: } a\,x + b\,y + c < 0\}$. Pertanto ogni retta determina due semipiani chiusi e due semipiani aperti. Ovviamente il complemento di un semipiano aperto è un semipiano chiuso e viceversa. Per quanto sia banale, verifichiamo che effettivamente un semipiano è un convesso il cui complementare è un convesso.

Proposizione 1. I semipiani aperti o chiusi sono insiemi convessi il cui complemento è un insieme convesso.

Dim. Dato il semipiano chiuso $F_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\text{: } a\,x + b\,y + c \geq 0\}$, consideriamo due suoi punti $P_1 = (\underline{x}_1, \underline{y}_1)$ e $P_2 = (\underline{x}_2, \underline{y}_2)$, e ricordiamo che un punto Q appartenente al segmento di estremi P_1 e P_2 avrà coordinate del tipo $(\lambda\,\underline{x}_1 + \mu\,\underline{x}_2, \lambda\,\underline{y}_1 + \mu\,\underline{y}_2)$ con $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. Tenendo conto che $a\,\underline{x}_1 + b\,\underline{y}_1 + c \geq 0$, $a\,\underline{x}_2 + b\,\underline{y}_2 + c \geq 0$, avremo

$$a(\lambda\,\underline{x}_1 + \mu\,\underline{x}_2) + b(\lambda\,\underline{y}_1 + \mu\,\underline{y}_2) + c = a(\lambda\,\underline{x}_1 + \mu\,\underline{x}_2) + b(\lambda\,\underline{y}_1 + \mu\,\underline{y}_2) + (\lambda + \mu)c = \lambda(a\,\underline{x}_1 + b\,\underline{y}_1 + c) + \mu\,(a\,\underline{x}_2 + b\,\underline{y}_2 + c) \geq 0.$$

Questo prova che P appartiene al semipiano. In modo simile si procede per i semipiani aperti. È evidente che il complemento di un semipiano, essendo ancora un semipiano, risulta convesso.

Tuttavia l'implicazione inversa, non vale, come d'altra parte è emerso durante la discussione nel Forum. Infatti il seguente è un controesempio.

Controesempio. Ogni sottoinsieme del piano Euclideo che si ottiene da un semipiano chiuso sottraendo una semiretta dalla sua frontiera è un convesso con complemento convesso: tuttavia non è un semipiano.

Tuttavia si può tentare di riformulare la congettura in modo opportuno e per fare questo è utile ricordare la seguente forma geometrica del famoso Teorema di Hahn-Banach.

Teorema 2 (Teorema di Hahn-Banach). *Siano C_1 e C_2 sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti del piano Euclideo, allora esiste una retta che li separa, cioè una retta che individua due semipiani chiusi uno dei quali contiene C_1 e l'altro C_2.*

Da tale teorema segue la seguente proposizione. Nel seguito, dato un insieme X, denotiamo con $–X$, $c(X)$ e $i(X)$ il completamento, la chiusura e l'interno di X, rispettivamente.

Proposizione 3. *Sia C un sottoinsieme del piano Euclideo, allora*

C e $-C$ sono *convessi* $\Rightarrow$ *$c(C)$ e $i(-C)$ sono semipiani complementari.*

Dim. Supponiamo che C e $-C$ siano convessi e che l'equazione di una retta che separa tali insiemi sia $a\,x + b\,y + c = 0$. Questo significa che

$C \subseteq F_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a\,x + b\,y + c \geq 0\}$ e
$-C \subseteq G_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a\,x + b\,y + c \leq 0\}$

e quindi, che

$c(C) \subseteq c(F_c) = F_c$ e
$i(-C) \subseteq i(G_c) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a\,x + b\,y + c < 0\}$.

Per provare che $c(C) = F_c$ osserviamo che

$F_c \cap -c(C) = F_c \cap i(-C) \subseteq \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :$
$a\,x + b\,y + c \geq 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\text{: } a\,x + b\,y + c < 0\} = \varnothing$

e che quindi $F_c \subseteq c(C)$. Questo prova che $c(C)$ è un semipiano. Essendo $i(-C) = -c(C)$ il complemento di un semipiano, anche $i(-C)$ è un semipiano.

L'implicazione inversa non vale, infatti se C è un semipiano chiuso privato di un numero finito di punti della frontiera, allora c(C) e $i(-C)$ sono semipiani ma né C né $-C$ sono convessi. Tuttavia dalla proposizione 3 segue immediatamente la validità della congettura, purché si aggiunga l'ipotesi che C sia chiuso o aperto.

Teorema 4. Supponiamo che C sia chiuso oppure aperto, allora vale la seguente equivalenza:

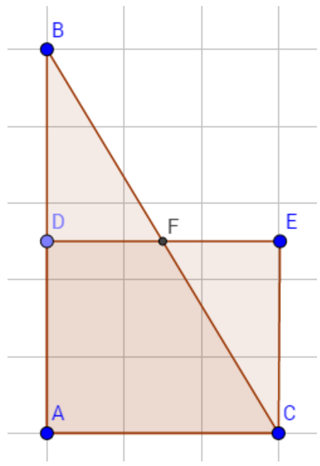
C e $–C$ sono *convessi* $\Leftrightarrow$ *C e $-C$ sono semipiani.*

Dim. Basta osservare che, per la proposizione 3, se C è chiuso e C e $-C$ sono convessi allora $c(C) = C$ e $i(-C) = -C$ sono semipiani. Nel caso in cui C è aperto, essendo $-C$ chiuso, $c(-C) = -C$ e $i(-(-C)) = C$ sono semipiani.

2. Conclusione

L'avere affrontato la congettura attraverso il teorema di Hahn-Banach non è completamente soddisfacente in quanto si preferirebbe una dimostrazione di carattere elementare e con argomentazioni di tipo geometrico e non analitico. D'altra parte c'è da osservare che il teorema di Hahn-Banach, anche se non viene usualmente inserito nei programmi scolastici, non è poi tanto difficile da dimostrare.

Un'ulteriore questione riguarda l'ipotesi fatta che C sia o un chiuso oppure un aperto ed anche la natura dei controesempi proposti che sono in qualche modo lontani dalla comune intuizione geometrica. Infatti forse si dovrebbe distinguere tra l'intuizione che è alla base dell'idea di spazio e di enti geometrici e la costruzione insiemistico-algebrica che è alla base dell'attuale geometria analitica. In particolare se è ragionevole vedere una figura geometrica come un cerchio o un triangolo come insieme di punti (e quindi insieme di coppie di numeri reali), non è detto che ogni insieme di punti possa essere considerato una figura geometrica. Si può affermare che l'insieme dei punti che hanno coordinate potenze di 2 sia una figura geometrica? L'intuito geometrico non distingue tra semipiano aperto e la sua chiusura e tantomeno riesce a vedere come figure geometriche semipiani chiusi dalla cui frontiera è stata tolta una semiretta o semipiani aperti alla cui frontiera sono stati aggiunti alcuni punti. Ad esempio, un triangolo è un insieme aperto o un insieme chiuso? Si deve scegliere tra queste due possibilità poiché i famosi criteri di uguaglianza dei triangoli non permettono di accettare contemporaneamente entrambe. Un triangolo chiuso ed il suo interno verificano tutti i criteri di uguaglianza tra triangoli pur non essendo uguali. Usualmente si opta per quelli chiusi, ma questa scelta crea altri dubbi. Ad esempio se si taglia una figura in più figure, come viene fatto in teoria della equi-scomponibilità tramite la nozione di partizione ed isometria, queste figure non possono essere tutte insiemi chiusi e nemmeno tutte insiemi aperti. Consideriamo il triangolo rettangolo ABC disegnato a lato ed il rettangolo ADEC, dove D è il punto di mezzo di AB. Allora per provare che queste due figure sono equiscomponibili si osserva che la prima si può ripartire in un trapezio ADFC ed un triangolo DBF e la seconda nello stesso trapezio e nel triangolo FEC. Una volta provato che il triangolo DBF è uguale al triangolo FEC, questo permette di concludere che le due figure sono equiscomponibili e quindi hanno la stessa area. Il problema che nasce è che se si vuole parlare di partizione allora si deve chiarire se i punti di DF appartengono al triangolo DBF o al trapezio ADFC. Nel primo caso il triangolo DBF è chiuso e quindi il triangolo FEC essendo isometrico a DBF deve essere un chiuso. Questo comporta che il trapezio, visto come parte del triangolo ABC, rimane "aperto" sul lato DF. Invece, visto come parte del rettangolo è un insieme "aperto" sul lato FC. Esistono pertanto due trapezi apparentemente uguali ma che, di fatto, non possono essere isometrici. In definitiva, a stretto rigore, non sarebbe lecito dire che le due figure sono equi-scomponibili.



Una risposta a questi dubbi forse può essere fornita dalle geometrie senza punti, in cui le figure geometriche non sono viste come insiemi di punti ma come nozioni primitive (cosa che d'altra parte facevano anche gli antichi greci). In tali geometrie, come avviene per le geometrie non euclidee, vengono proposti modelli che si costruiscono all'interno del modello euclideo basato sull'insieme $\mathbf{R}^2$. Tecnicamente questo viene fatto definendo un operatore di "regolarizzazione" $r : P(\mathbf{R}^2) \to P(\mathbf{R}^2)$ ponendo $r(X) = c(i(X))$ per ogni $X \in P(\mathbf{R}^2)$. Si dice anche che $r(X)$ è *il regolarizzato* di X tramite r. Chiamiamo *chiuso regolare* ogni punto fisso di questo operatore e l'idea è quella di considerare come *figure geometriche* solo i chiusi regolari. Questo significa che, a parte l'insieme vuoto, un insieme con l'interno vuoto non è da considerare una figura geometrica, ed in particolare i punti e le rette non sono figure geometriche. I semipiani chiusi sono figure geometriche mentre quelli aperti non lo sono. Il controesempio che abbiamo costruito togliendo da un semipiano chiuso una semiretta contenuta nella frontiera non è una figura geometrica, come non lo è un semipiano aperto a cui si siano aggiunti un numero finito di punti della frontiera.

Da notare che una importante proprietà della classe delle figure geometriche, cioè dei chiusi regolari, è che risulta essere un algebra di Boole completa senza atomi. In quest'algebra le operazioni si definiscono ponendo $X \oplus Y = r(X \cup Y)$, $X \otimes Y = r(X \cap Y)$, $\sim X = r(-X)$. Se la nozione di partizione di una figura si riferisce a tali operazioni, allora l'idea intuitiva di partizione come "risultato di tagli" rimane ma i "paradossi" di cui sopra scompaiono. Nell'esempio di equiscomponibilità del triangolo rettangolo e del rettangolo, se il triangolo DBF ed il trapezio ADFC sono assunti come insiemi chiusi, allora DBF $\otimes$ ADFC = r(DBF $\cap$ ADFC) = $\varnothing$ e DBF $\oplus$ ADFC = r(DBF $\cup$ ADFC) = ABC. Quindi è lecito considerare triangolo e trapezio una partizione di ABC. La stessa cosa può essere detta per il triangolo FEC ed il trapezio ADFC che vengono a costituire una partizione di ADEC.

Tornando al problema degli insiemi convessi con complemento convesso, se si adotta la definizione di figura geometrica che abbiamo proposto, allora la congettura si può dire dimostrata senza l'ipotesi di chiusura, mentre i vari controesempi cadono.

Riferimenti bibliografici: [B.1] Coppola C., Gerla G., Miranda A., *Point-free foundation of geometry and multi-valued logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol 51, (2010) 383-405. [B.2] Gerla G., A. Miranda, *Graded inclusion and point-free geometry,* International Journal of Pure and Applied Mathematics, 11 (2004) 63-81. [B.3] Gerla G., A. Miranda, *Mathematical features of Whitehead's point-free geometry*, in Handbook of Whiteheadian Process Thought, Michel Weber and William Desmond, Jr. (eds.), Frankfurt / Lancaster, Ontos Verlag, vol.2, (2008), 119-130. [B.4] Gerla G., Gruszczyński R., *Point-Free Geometry, Ovals and Half-Planes*, The Review of Symbolic Logic, Volume 10, 2, (2017), 237-258. [B.5] Matematicamente (forum): Insiemi convessi con complementare convesso, https://www.matematicamente.it/forum/convessi-con-complementari-convessi-t38854.html

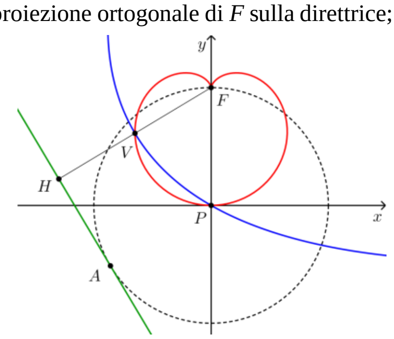
[*], [**] Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno

Cardioide e vertici di parabole

Francesco Daddi [***]

Si determini il luogo dei vertici delle parabole passanti per P ed aventi fuoco in F.

Senza perdita di generalità scegliamo il sistema di riferimento cartesiano in modo che P coincida con l'origine ed il fuoco abbia coordinate $F(0\,;2)$. Poiché P deve essere equidistante da F e dalla direttrice, la generica direttrice è tangente alla circonferenza di centro P e passante per F; con la scelta fatta del sistema di riferimento, la circonferenza ha equazione cartesiana $x^2+y^2=4$ e la retta tangente nel suo generico punto $A(2\cos t\ ;2\sin t)$ ha equazione $\cos(t)\,x+\sin(t)\,y-2=0$. Si noti che si deve porre $t \neq \pi/2+2k\pi$ in quanto il fuoco F non può appartenere alla direttrice. Ricordiamo ora che il vertice V è il punto medio del segmento avente come estremi F e H, dove H è la proiezione ortogonale di F sulla direttrice; poiché la retta



perpendicolare alla direttrice e passante per $F(0\,;2)$ ha equazione $\sin(t)\,x - \cos(t)\,(y-2) = 0$, svolgendo i calcoli si ottiene $H(2\cos t\,(1-\sin t)\,;2+2\sin t\,(1-\sin t))$. Si osservi che H descrive la *curva pedale* (o *podaria*) della circonferenza rispetto al punto F (si ricorda che la *pedale* è il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari condotte da un punto assegnato alle rette tangenti alla curva). È noto (si veda ad esempio http://mathworld.wolfram.com/PedalCurve.html) che, dal momento che F appartiene alla circonferenza, il punto H descrive una **cardioide**. Per ricavare le coordinate del vertice V, basta calcolare il punto medio del segmento FH, ottenendo così $V(\cos t\,(1-\sin t)\,;2+\sin t\,(1-\sin t))$.

Osservando che il luogo dei vertici può essere ottenuto trasformando la cardioide descritta dal punto H mediante l'omotetia di centro F e rapporto uguale a 1/2, possiamo affermare che il luogo dei vertici richiesto all'inizio è la cardioide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t\,(1-\sin t) \\ y = 2+\sin t\,(1-\sin t) \end{cases} \quad \text{con} \quad t \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi\,.$$

[***] Liceo Scientifico "Carducci" di Volterra (PI).
E-mail: francesco.daddi@istruzione.it