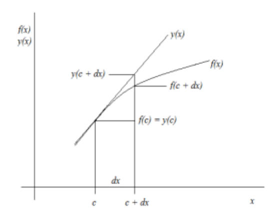
MatematicaMente

ISSN: 2037-6367

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 229 – Pubblicato il 04 – 10 – 2017



Tributo a Cantor

Carlo Toffalori [*]

Ricorre nel 2018 il primo centenario della scomparsa di Georg Cantor, il matematico tedesco che avviò la teoria degli insiemi e la matematica dell'infinito. Alla loro fondazione Cantor dedicò vari articoli e saggi, a partire dal 1874 e per gran parte della sua vita, finché altri travagli e progressive crisi di depressione non presero il sopravvento e lo allontanarono dalla ricerca. Vorrei qui commentare il lavoro che inaugurò questa svolta epocale della storia della scienza, dunque il contributo del 1874 che per la prima volta distinse due livelli diversi di infinito, quello numerabile dei naturali e quello continuo dei reali, e iniziò così lo studio matematico dell'infinito: non più quello *potenziale* ammesso anche da Aristotele, ma quello *attuale* – Cantor lo avrebbe chiamato *proprio* – che sembrerebbe invece estraneo a ogni seria analisi scientifica. L'articolo comparve sul volume 77 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, una rivista di grandissimo prestigio, alle pagine 258-262. Il titolo originale era *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, in italiano *Su una proprietà della classe di tutti i numeri reali algebrici*. Non lasciava dunque presagire nessuno sviluppo sensazionale sull'infinito, alludeva piuttosto a questioni tipiche della matematica, come la soluzione delle equazioni, quando appunto evocava quei numeri reali che vengono chiamati *algebrici*. Ricordiamone infatti la definizione, rimandando a più tardi la spiegazione del legame con l'infinito.

Un reale si dice dunque *algebrico* se è radice di qualche polinomio non nullo con coefficienti interi e una indeterminata x. Ogni razionale è algebrico, perché, presentandosi come frazione m/n con m, n interi primi tra loro, n positivo, annulla il polinomio di primo grado a coefficienti interi $nx - m$. Così $3/4$ è radice di $4x - 3$, $-1/2$ di $2x + 1$, eccetera. Ma anche $\sqrt{2}$, per quanto irrazionale, è algebrico, perché radice del polinomio a coefficienti interi $x^2 - 2$. Lo stesso si applica a tantissimi altri esempi, come, per ogni coppia di interi n e $d \geq 0$ con $n > 1$, a $\sqrt[n]{d}$, che è soluzione del polinomio $x^n - d$. Insomma ci sono dovizie di numeri algebrici, tanto più che il loro insieme si rivela chiuso rispetto a tutte le operazioni elementari, addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione: come dire che somme, prodotti, opposti e inversi di numeri algebrici restano algebrici – l'argomento che lo prova è tutt'altro che semplice, anzi acuto e sottile, ma pienamente convincente. Tra l'altro, la nozione di numero algebrico si estende in modo naturale anche ai numeri complessi, mantenendo formalmente la stessa identica definizione. In particolare l'unità immaginaria i, cioè la radice quadrata di -1, è algebrica perché risolve $x^2 + 1$. Un numero reale o complesso che non è algebrico, cioè non annulla nessun polinomio diverso da 0 a coefficienti interi, si chiama *trascendente*. Non è facile produrne esempi, cioè determinare numeri che non risolvono ***nessuna*** equazione non identica a coefficienti interi. Tuttavia alcuni reali trascendenti emersero faticosamente a partire dalla metà dell'Ottocento, costruiti in modo abbastanza artificiale da Liouville nel 1844. Tra di loro sta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 1{,}110001000000000000000001000\ ...,$$

ovvero il numero reale il cui sviluppo decimale contiene 1 nei posti corrispondenti ai fattoriali, cioè $1 = 1!$, $2 = 2!$, $6 = 3!$, $24 = 4!$, $120 = 5!$ eccetera, e 0 altrove. Nel 1873, poi, Hermite provò la trascendenza di e – la base dei logaritmi naturali. La dimostrazione adopera argomenti profondi di analisi. Adattandola opportunamente Lindemann giunse nel 1882 a provare che perfino π è trascendente. Il suo teorema ebbe grandissima eco, perché risolse in negativo la secolare questione della quadratura del cerchio con riga e compasso. Si osserva infatti che un numero costruibile con riga e compasso deve essere algebrico, e anzi radice di un polinomio irriducibile a coefficienti interi di grado potenza di 2. Ma π, in quanto trascendente, non soddisfa una tale proprietà.

Ai numeri trascendenti Hilbert dedicò il settimo dei suoi 23 problemi del 1900, congetturandovi che, se a, b sono numeri algebrici, $a \neq 0, 1$ e b è irrazionale, allora la potenza a^b è trascendente. Per esempio, il criterio si applica a $2^{\sqrt{2}}$, che corrisponde al caso $a = 2$, $b = \sqrt{2}$. Il problema di Hilbert fu risolto positivamente nel 1934 indipendentemente da Gel'fond e Schneider, grazie nuovamente all'impiego di formidabili strumenti tecnici di lavoro. Se ne deduce la trascendenza pure di e^{π}. La conclusione può stupire perché, come abbiamo appena finito di vedere, né e né π sono algebrici. Allargando però il teorema di Gel'fond e Schneider all'ambito complesso e adoperando l'identità di Eulero, si ottiene $e^{\pi} = (e^{\pi i})^{-i} = (-1)^{-i}$, che viene a corrispondere alla forma prevista per $a = -1$ e $b = -i$.

Prendiamo comunque atto che i numeri trascendenti sono un'infinità, così come gli algebrici.

L'articolo del 1874 di Cantor si inserisce in questo filone di ricerca, ma in modo originalissimo. Non aggiunge infatti alcun esempio effettivo di reale trascendente, ma garantisce che questi numeri, per quanto più ostici da trovare degli algebrici, sono tuttavia in definitiva ben più frequenti. Il punto è che

(1) i numeri algebrici si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali,
(2) i trascendenti, invece, no, dunque in un senso opportuno sono enormemente di più.

L'argomento di Cantor per (2) supera però l'ambito specifico dei numeri trascendenti, per cui venne ideato, e si applica ad altri insiemi, inclusi la collezione $\mathbb{R}$ di tutti i reali, oppure un qualunque intervallo reale di estremi $a < b$. Nemmeno questi insiemi si possono mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Emergono allora, come già si diceva, almeno due livelli distinti di infinito: quello dei naturali, che Cantor chiamerà *numerabile*, e quello *continuo* dei reali. Le successive ricerche di Cantor estenderanno questo risultato e stabiliranno l'esistenza di una infinitudine di cardinali infiniti, ben oltre i due singoli casi numerabile e continuo. Concentriamoci però qui sulla prova di Cantor del 1874, distinguendo le due parti (1) e (2).

In verità (1) si inserisce in una serie di analoghi risultati di numerabilità scoperti da Cantor e non solo da Cantor. Per introdurne la dimostrazione, consideriamo preliminarmente il caso dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali, che è appunto numerabile. Attenzione, però: un'eventuale corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ non può conciliarsi con le abituali relazioni di ordine nei due insiemi, che sono strutturalmente diverse, discreta e anzi buona quella di $\mathbb{N}$ (per la quale vale il principio del minimo, cioè ogni sottoinsieme non vuoto ha un primo elemento), densa quella di $\mathbb{Q}$ (per cui non esiste, per esempio, un minimo razionale positivo). Dunque nessuna biiezione tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ ne preserva l'ordine. Possiamo tuttavia ridisporre gli elementi di $\mathbb{Q}$ con la seguente procedura.

- Ricordiamo anzitutto che ogni razionale si rappresenta in modo unico come frazione m/n, con m, n interi primi tra loro e n positivo.
- Associamogli allora un'*altezza*, definita come il numero intero positivo $|m| + n$ (così, per esempio, $0 = 0/1$ ha altezza 1, $-1/2$ ha altezza 3, $1/3$ ha altezza 4, e via dicendo).
- Osserviamo adesso che i razionali che condividono un'altezza fissata sono in numero finito, perché un intero positivo si può ottenere solo in un numero finito di modi come somma $|m| + n$ (per esempio i razionali di altezza 3 sono $-2/1, -1/2, 1/2$ e $2/1$, quelli di altezza 4 sono $-3/1$, $-1/3$, $1/3$ e $3/1$).
- I valori che corrispondono a una data altezza si possono mettere in fila secondo l'ordine usuale di $\mathbb{Q}$, proprio come abbiamo fatto nel punto precedente a proposito delle altezze 3 e 4.

I razionali così disposti, prima in base all'altezza e poi, a parità di altezza, secondo l'ordine abituale, in dettaglio $0/1$ (di altezza 1), $-1/1$, $1/1$ (di altezza 2), $-2/1$, $-1/2$, $1/2$ e $2/1$ (di altezza 3) eccetera, si pongono agevolmente in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ e con la sequenza $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ dei suoi elementi.

Una procedura analoga, seppur leggermente più elaborata, stabilisce la numerabilità dei reali algebrici. Ci si affida, infatti, a un più sottile concetto di *altezza*, fondato sulla definizione stessa di numero r *algebrico*, dotato cioè di un polinomio non nullo a coefficienti interi di cui è radice.

Ora, questo polinomio è tutto meno che unico, per esempio $\sqrt{2}$ annulla non solo $x^2 - 2$ ma anche $3x^2 - 6$, $-x^2 + 2$, $x^4 - 4$, $x^6 - 8$, $x^4 - 3x^2 + 2$ e molto altro ancora. Possiamo però riferirci, tra tutti i vari polinomi che hanno r come radice, a quelli che hanno grado minimo e sono di conseguenza irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$. Tra loro possiamo selezionare quelli che sono anche *primitivi*, cioè ammettono 1 come massimo comune divisore dei coefficienti (altrimenti si divide proprio per questo massimo comune divisore). Si può finalmente convenire che il coefficiente di grado massimo sia positivo. Il polinomio $p(x)$ così ottenuto è univocamente definito da r – nel caso di $\sqrt{2}$ si ricava proprio $x^2 - 2$.

Concordiamo per semplicità che questo polinomio $p(x)$ abbia grado d e si esprima come $p(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$. Ribadiamo però che tanto d quanto i vari coefficienti a_i sono univocamente fissati da r. Ricordiamo semmai che un tale $p(x)$ ha soltanto un numero finito di radici reali, al massimo tante quante il grado d, e tra queste appunto r.

Assegniamo ora come *altezza* a r tramite $p(x)$ la somma di d e dei valori assoluti dei vari coefficienti a_i quando i varia da 0 a d – di nuovo un intero positivo.

Osserviamo che, come già nel caso razionale, ogni possibile altezza è condivisa solo da un numero finito di polinomi e quindi di reali. Per esempio l'altezza 3 può riguardare soltanto polinomi di grado 1 e 2, in modo da consentire almeno un coefficiente non nullo. Per il grado 1, la somma 2 dei valori assoluti dei coefficienti si raggiunge in corrispondenza a

$$2x, x \pm 1$$

(si ricordi che il coefficiente di grado massimo deve essere positivo). Ma di questi 3 valori, il primo va scartato perché riguarda un polinomio non primitivo, restano quindi $x \pm 1$ con le loro radici ∓ 1, ordinabili nel modo consueto $-1 < +1$. Al grado 2 corrisponde invece il solo polinomio x^2 con la sua radice doppia 0.

La situazione che ne risulta è, come preannunciato, analoga a quella di $\mathbb{Q}$, bastevole dunque a estendere pure ai reali algebrici la numerabilità.

Così si conclude la prima metà del lavoro di Cantor. [*Segue al numero* 230]

[*] Sezione di Matematica – Scuola di Scienze e Tecnologie – Università degli Studi di Camerino

Zipf's «Rank-Size» Restatement

di Luciano Corso

Nel 1949 il linguista e filologo statunitense G. K. Zipf (n. 1902, m. 1950) pubblicò un articolo dal titolo *Human Behaviour and the Principle of Least-Effor*t (= Comportamento umano e il principio di minimo sforzo) [B.1] nel quale propose un'interpretazione della qualità lessicale di un documento attraverso un esame statistico delle frequenze associate alle diverse parole usate dall'autore, dopo una opportuna riclassificazione. In generale, data una sequenza di eventi A_i (parole, nel caso di Zipf) con frequenze osservate n_i, l'analisi della loro distribuzione, riclassificata secondo il valore decrescente delle frequenze, è utile per studiare l'evoluzione di un fenomeno e per meglio interpretarlo. Successivamente, le applicazioni del metodo hanno invaso quasi tutti i settori della scienza [B.2, B.3]. Esse vanno dal calcolo delle probabilità, all'economia, alla linguistica, alla geofisica (distribuzione rango della magnitudine dei terremoti), alle alluvioni periodiche dei fiumi, alle classificazioni dell'intensità di potenza delle esplosioni solari, ecc.

Consideriamo un documento o un libro e sia X l'insieme delle parole che lo compongono; per esempio, possiamo fissare l'attenzione sulla Costituzione della Repubblica Italiana. Per parola, in questo contesto, si intende una sequenza ordinata di simboli di un alfabeto che abbia associata un significato chiaro nella lingua cui si riferisce. Contiamo tutte le parole di questo documento, escludendo la punteggiatura. Supponiamo che sia $|X| = N$ il numero totale di parole contate. Nello stesso tempo contiamo anche la frequenza osservata di ogni singola parola che appare nel documento. Sia n_i la frequenza associata alla parola i-esima. Assegniamo quindi un numero d'ordine r (*rank-size* = dimensione-rango o semplicemente rango) a ogni distinta parola in funzione inversa alla sua frequenza osservata: alla parola cui è associata la maggiore frequenza assegneremo $r = 1$ con frequenza ν_1, alla seconda come ordine d'importanza assegneremo rango $r = 2$ con frequenza ν_2 e così via fino all'ultima parola con associata la frequenza più bassa. Quindi le condizioni sono: $\nu_1 = max(n_i)$ e $\nu_j \geq \nu_{j+1}, \forall j$. Vogliamo ora studiare la relazione (ammesso che ne esista una) tra r e $h(A_r)$, dove $h(A_r)$ rappresenta la distribuzione delle frequenze associate all'evento (nel nostro caso la parola) A_r di rango r. Questa relazione è chiamata *rank-size law* e si presenta come una funzione della famiglia delle leggi di potenza [B.2].

La legge di potenza più nota è la densità di frequenza (o di probabilità) di V. F. D. Pareto (1848 – 1923) che, nella sua forma moderna è espressa dalla seguente equazione [B.4]

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x_0} \cdot \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} & \{x |\, x \in \mathbf{R}_0^+,\ x \geq x_0,\ \alpha > 0\} \\ 0 & altrove \end{cases} \tag{1}$$

in cui x_0 è un valore critico sotto il quale non ha senso andare e α è un parametro la cui stima va fatta sulla base dei dati sperimentali. (1) si presenta come un'iperbole troncata di grado $\alpha + 1$. Dal punto di vista analitico la densità di probabilità (1) è un caso particolare di una densità di probabilità Beta. [B.5, B.6].
In Figura 1 abbiamo una rappresentazione grafica della legge di Pareto.

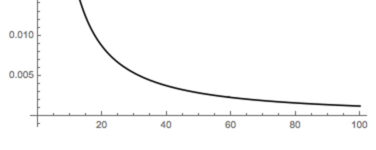


Fig.1. Comportamento della densità di frequenza di Pareto con $\alpha = 0{,}2$ e $x_0 = 10$. Nella legge di Pareto x è il reddito e $h(x)$ la densità dei redditieri; x_0 è il reddito di sopravvivenza.

La distribuzione di frequenze (di probabilità) di Pareto (funzione cumulata delle frequenze o della probabilità) si determina facilmente integrando (2) rispetto a una variabile ausiliaria u nell'intervallo $[x_0, x]$. [*Segue al numero* 230]