MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 23 – novembre 1999

Sulla serie binomiale

di Arnaldo Vicentini

Nel foglio n. 9 (settembre '98) di questo periodico, nell'articolo *La serie binomiale*, G. Pezzo dà per certo che per ogni α reale $g(x)=(1+x)^{\alpha} \Rightarrow g'(x)=\alpha\cdot g(x)/(1+x)=\alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}$. Ciò sotto intende che valgano per ogni α, β reali:

a) $(1+x)^{\alpha}(1+y)^{\alpha}=[1+(x+y+xy)]^{\alpha}$

b) $(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}=(1+x)^{\alpha+\beta}$

c) $(1+\varepsilon)^{\alpha}=1+\alpha\varepsilon+o(\varepsilon)$

Applicando la definizione di derivata a $g(x)$ abbiamo infatti i seguenti passaggi:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{(1+x+\delta)^{\alpha}-(1+x)^{\alpha}}{\delta}=\frac{(1+x)^{\alpha}}{1+x}\lim_{\delta\to 0}\frac{\left(1+\frac{\delta}{1+x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\delta}{1+x}}=$$

$$(1+x)^{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^{\alpha}-1}{\varepsilon}=(1+x)^{\alpha-1}\alpha$$

il 1° passo è valido se è vera la a), il 2° se è vera la b), il 3° se è vera la c). Ma il riconoscere quelle proprietà per esponenti reali qualsiasi è molto laborioso attraverso la consueta estensione delle proprietà delle potenze che fa uso di classi contigue. Per accettare $g(x)=(1+x)^{\alpha}\Rightarrow g'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ basta però pensare $(1+x)^{\alpha}$ un mero simbolo che denoti una funzione $f(x,\alpha)$ caratterizzata da:

$$f(x,0)=f(0,\alpha)=1 \wedge \partial f(x,\alpha)/\partial x = \alpha\cdot f(x,\alpha-1). \qquad (1)$$

L'esistenza e l'unicità di $f(x,\alpha)$ è garantita dall'apposito teorema sul *problema di Cauchy*. La proprietà caratteristica (1) comporta che $f(x)$ è indefinitamente derivabile in $x=0$ e perciò sviluppabile in serie di potenze convergente in un intorno di 0; anzi, consente di determinare costruttivamente la serie stessa. Si potrà allora verificare che $(1+x)\cdot f(x,\alpha-1)=f(x,\alpha)$. Dopo di che si troverà conveniente la notazione $f(x,\alpha)=(1+x)^{\alpha}$ e avremo i requisiti per gustare l'articolo di Pezzo.

La serie binomiale

Sia $f(x,\alpha)$, con x complesso e α reale, tale che:

$$f(x,0)=f(0,\alpha)=1 \wedge \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}=\alpha\, f(x,\alpha-1). \qquad (1)$$

Il suo sviluppo in serie di potenze sia:

$$f(x,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\alpha)x^k\ . \qquad (2)$$

La proprietà caratteristica (1) comporta $a_0(\alpha)=1$ per ogni α;

$a_{k+1}(\alpha)=\alpha\cdot a_k(\alpha-1)/(k+1)$

per ogni k naturale. Per induzione su k, iniziando da k=0, troviamo:

$a_1(\alpha) = \alpha\cdot 1=\alpha \quad ; a_1(\alpha-1)=\alpha-1\ ;$

$a_2(\alpha) = \alpha(\alpha-1)/2 \quad ; a_2(\alpha-1)=(\alpha-1)(\alpha-2)/2\ ; \ldots$

$$a_k(\alpha)=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}=\binom{\alpha}{k}. \qquad (3)$$

Per $\alpha=n$ naturale, $a_k(n)=0$ per ogni $k > n$ e la (2) si riduce al po-linomio $(1+x)^n$. Si verifica subito che per $k \geq 1$ vale la proprietà:

$$a_k(\alpha-1)+a_{k-1}(\alpha-1)=a_k(\alpha). \qquad (4)$$

Infatti

$$\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}=\binom{\alpha}{k}.$$

Allora:

$$(1+x)\cdot f(x,\alpha-1)=(1+x)\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\alpha-1)x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}a_k(\alpha-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\alpha-1)x^{k+1}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\alpha-1)x^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}(\alpha-1)x^k=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}a_k(\alpha)x^k=f(x,\alpha)$$

$$(1+x)\cdot f(x,\alpha-1)=f(x,\alpha). \qquad (5)$$

Insieme, la (1) e la (5) dicono anche che :

$$f'(x,\alpha)=\alpha\cdot f(x,\alpha)/(1+x), \qquad (6)$$

cioè che $y=f(x,\alpha)$ risolve il problema di Cauchy:

$$y'-[\alpha/(1+x)]y=0 \text{ con } y(0)=1. \qquad (7)$$

Appendice

Sia $y_e=Exp(x)$ la soluzione di $y_e'=y_e$; $y_e(0)=1$. Sia $y_1=ln(x)$ la soluzione di $y_1'(x)=1/x;\ y_1(1)=0$. Si ponga poi $h(x,\alpha)= Exp[\alpha\cdot ln(1+x)]$. Allora $h(x,\alpha)$ verifica la (7). Perciò $f(x,\alpha)= Exp[\alpha\cdot ln(1+x)]$. Per quest'ultima valgono anche le proprietà:

$$h(x,\alpha)\cdot h(y,\alpha)=h(x+y+xy,\alpha); \qquad (8)$$

$$h(x,\alpha)\cdot h(x,\beta)=h(x,\alpha+\beta). \qquad (9)$$

La proprietà (1), assieme alla (8) e alla (9) [pure verificabili direttamente su $f(x,\alpha)$, ma con maggiori difficoltà], rendono ragione della notazione $f(x,\alpha)=(1+x)^{\alpha}$ con la quale le (1), (8), (9) diventano rispettivamente:

$(1+x)^0=1^{\alpha}=1;\ \ g(x)=(1+x)^{\alpha} \Rightarrow g'(x)=\alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1};$

$(1+x)^{\alpha}\cdot(1+y)^{\alpha}=[(1+x)\cdot(1+y)]^{\alpha};$

$(1+x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta}=(1+x)^{\alpha+\beta}.$

Derivate secondo Leibniz

di Luigi Marigo

La derivata è usualmente definita così:

$$Dy = y' = \lim_{\text{Ä}x\to 0}\frac{\text{Ä}y}{\text{Ä}x}$$

se esiste ed è finito. Per Leibniz (1646 – 1716) era invece

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

ove dx è una variazione infinitesima e dy la corrispondente variazione infinitesima di y, dette "infinitesimi". Se si fosse trattato di considerare dy/dx come un simbolo globale che riassume in sé la costruzione del rapporto incrementale e il successivo passaggio al limite, non ci sarebbero problemi, ma Leibniz assegnava a dx e dy separatamente una esistenza propria, considerandoli a tutti gli effetti come numeri, più piccoli in valore assoluto di ogni numero razionale positivo, ma non nulli; su di essi possono essere eseguite tutte le operazioni algebriche.

La costruzione di una derivata, secondo la concezione leibniziana, poggia su di un'elementare algebra degli infinitesimi:

I) Si ammettono monomi con fattori infinitesimi e il numero di fattori infinitesimi è detto "ordine di infinitesimo" del monomio: $5{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}dx$ è del 1° ordine; $(-1/2){\cdot}df{\cdot}d^2y$ è del 3° ordine e così via. II) In una somma di monomi infinitesimi quelli di ordine superiore possono essere trascurati rispetto a quelli di ordine minimo. III) Tutti gli infinitesimi possono essere trascurati rispetto a un addendo finito e non infinitesimo. IV) Nessun infinitesimo può essere trascurato rispetto a zero.

Come esempio costruiamo la derivata della funzione $y=\sqrt{x}$ ($x=y^2$ con $y\geq 0$). Calcolando la funzione in $x+dx$ si ha: $(y+dy)^2=x+dx$ e quindi $y^2+2ydy+d^2y=x+dx$, dove dy è l'incremento della y corrispondente all'incremento dx; essendo $y^2=x$ e trascurando d^2y si ha ($dx\neq 0$): $2ydy=dx$; $y'=dy/dx=1/2y=1/2\sqrt{x}$. La scrittura dy/dx non dipende da dx o dy, e si potrebbe ancora pensare ad una abile manipolazione che ci porta alla frazione dy/dx, ma così non è nell'esempio successivo.

Sappiamo che e è quel numero tale che $De^x=e^x$. Cerchiamo di determinare e per altra via:

$y+dy=e^{x+dx}$; $y+dy=e^x{\cdot}e^{dx}$;

essendo $y=e^x$, ne segue

$$y'=\frac{dy}{dx}=e^x\ \frac{e^{dx}-1}{dx}\,.$$

Così e è il numero cercato se e solo se $(e^{dx}-1)/dx$ è un numero e vale 1, il che comporta una inedita definizione di e:

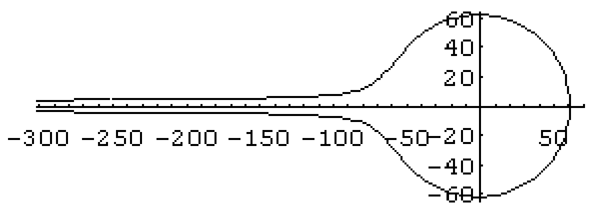
$$e=(1+dx)^{\frac{1}{dx}}\,.$$

Come giustificare l'uguaglianza

$$1=\frac{e^{dx}-1}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\ ?$$

Questa volta lasciamo il compito ai lettori.

Ampolla rovesciata



L'equazione in coordinate polari è data da:

$f(t)=t\,/\,cos[t-\pi/2]+60$

dominio: $\{t,-\pi,\pi\}$.

Duecento anni fa

di Maurizio Emaldi *

Nel 1799 Paolo Ruffini pubblicava a Bologna la sua "*Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*". Riprendendo "L'immortale La Grange", Ruffini considerava permutazioni delle radici e giungeva alla conclusione. Ma la dimostrazione non era del tutto soddisfacente poiché Ruffini assumeva senza giustificazione che i radicali coinvolti nella risoluzione possono essere tutti espressi come funzioni razionali delle radici dell'equazione. Fu Abel che nel 1824 colmò questa lacuna facendo vedere che questi radicali possono essere scritti come funzioni razionali delle radici dell'equazione e di radici dell'unità. Ruffini deve dunque dividere con Abel il merito della dimostrazione. Ma l'approccio permutazionale di Ruffini ha dato il via allo sviluppo della teoria dei gruppi di permutazione.

* *Maurizio Emaldi - Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Padova.*

Libri in vendita a trattativa

Avviso

Sono finalmente pronti gli Atti del Congresso Mathesis del 1998.
Chi fosse interessato a riceverli contatti la redazione.

C'è caso e caso

di Luciano Corso

Consideriamo una sezione di piano di forma quadrata. Sul lato più basso orizzontale (asse delle ascisse) selezioniamo n_x punti casuali X provenienti da una distribuzione di probabilità uniforme continua. Selezioniamo inoltre n_y punti casuali sul lato verticale a sinistra (asse delle ordinate); chiamiamo Y questo insieme. Eseguiamo il prodotto cartesiano di X×Y. Si ottengono $n_x{\cdot}n_y$ coppie ordinate di reali che identificano nella sezione di piano considerata punti casuali (nel nostro caso si sono presi $n_x=20$ e $n_y=20$ per un totale di 400 punti; si veda la fig.1).

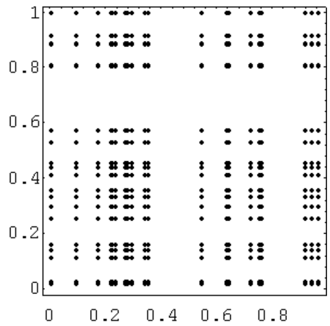


Fig. 1

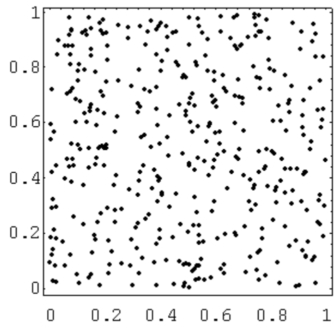


Fig. 2

Consideriamo ora una estrazione di coppie casuali di reali con una opportuna funzione *random* un numero alla volta e un abbinamento alla volta. Si ottengono anche in questo caso $n_x{\cdot}n_y$ punti casuali nello spazio considerato (anche in questo caso si sono selezionati 400 punti; si veda la fig. 2). Questa casualità è di tipo uniforme. Quale differenza c'è tra quest'ultima casualità e la prima?

Tra mesoni. muoni, leptoni, neutrini e quark

Capita, per i non addetti ai lavori, di trovarsi disorientati da una lezione sulla fisica delle particelle elementari. Anche se condotti da una guida sicura come il professor Modesto Pusterla – docente in quel di Padova – è difficile credere in una teoria fisica che, a mano a mano che si approfondiscono le conoscenze, ha sempre più bisogno di nuove particelle per far quadrare i conti. Quant'è il numero massimo di particelle elementari distinte che costituiscono la struttura fine della materia? Non pare che vi sia un limite massimo e potrebbe accadere che, sulla base delle teorie attuali, tale numero possa assumere un valore molto grande. Ma una teoria scientifica è tanto più forte quanto meno è grande il numero di elementi che ne formano il fondamento. Ogni processo cognitivo profondo si richiama a questo principio. Qualcosa sfugge al profano di questo cosmo e, ascoltando lezioni e seminari che presentano i problemi della fisica delle particelle, pare di entrare in un mondo a teoria aperta, dove bisogna rincorrere le conseguenze di una tesi con risultati sperimentali che la convalidano di passo in passo ogniqualvolta che si scopre una nuova particella prevista teoricamente. Ma, forse, potrebbe essere che le particelle elementari siano davvero poche, e che in natura, quello che noi possiamo osservare, sia una manifestazione camaleontica di stati combinatori di queste. (*di Luciano Corso*)