ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 231 – Pubblicato il 04 – 12 – 2017

NUMERI ALGEBRICI E NUMERI TRASCENDENTI

Antonino Giambò [*]

1. Le "Indicazioni Nazionali" (Licei) fanno un cenno fugace ai numeri trascendenti nella sezione "Aritmetica e algebra" (secondo biennio), laddove recitano: «Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π, e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e, permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti». Tutto qui. Non c'è altro.
Le "Linee Guida" (Tecnici e Professionali), per parte loro, si limitano a segnalare come "conoscenze" il numero π e il numero e. Senza alcuna indicazione riguardo alle "abilità".
Sorgono allora alcuni interrogativi non da poco per il docente: Cosa devo dire sull'argomento? Fin dove posso spingermi? Cosa gli studenti devono sapere e saper fare?
Ecco, sono queste domande che mi inducono a formulare un'ipotesi di lavoro, esponendo quello che, a mio modesto parere, è il massimo che sull'argomento si può proporre all'attenzione e allo studio da parte degli studenti. Massimo che, però, vedrei realizzato al più nei Licei scientifici, mentre nei Licei non scientifici limiterei l'intervento alla sola definizione di "numeri algebrici" e "numeri trascendenti", specificando che i numeri π ed e appartengono a quest'ultima categoria (vedere al riguardo il prossimo paragrafo 2). Nei Tecnici e nei Professionali, infine, pur descrivendo cosa siano questi due numeri e come saltino fuori, tralascerei di parlare di numeri algebrici e numeri trascendenti.
Vado comunque ad esporre la mia ipotesi di lavoro.

2. Prendiamo in considerazione la più generale equazione algebrica di grado n a coefficienti interi:

$$(1) \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0\,,$$

dove i coefficienti a_i (con $a_0 \neq 0$) sono appunto numeri interi.
Ad equazioni di questo tipo sono correlate due categorie di numeri reali (o complessi): i "numeri algebrici" e i "numeri trascendenti". Valgono precisamente le seguenti definizioni:
Un numero reale (o complesso) si dice **algebrico** *se esiste qualche equazione algebrica a coefficienti interi di cui esso sia soluzione. Altrimenti si dice* **trascendente**.
Si capisce che l'insieme dei numeri reali (o complessi) algebrici e quello dei numeri reali (o complessi) trascendenti operano una partizione dell'insieme dei numeri reali (o complessi)
Ora, di numeri algebrici ne possiamo indicare un'infinità. Tanto per fornire qualche esempio, sono tali:

- i numeri razionali a / b (a, b interi con $b \neq 0$), essendo soluzioni dell'equazione $bx - a = 0$;
- i radicali di indice n, $\sqrt[n]{a}$, (n intero maggiore di 1, a reale positivo), essendo soluzioni dell'equazione $x^n - a = 0$;
- l'unità immaginaria i, essendo soluzione dell'equazione
- $x^2+1=0$;
- la sezione aurea dell'unità, $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/\,2$ e il numero aureo, $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$, essendo soluzioni rispettivamente delle equazioni $x^2 + x - 1 = 0$ e $x^2 - x - 1 = 0$.

Non è così, invece, per i numeri trascendenti, anche se, cosa che può apparire sorprendente, questi sono in quantità infinitamente maggiore dei numeri algebrici.
Neppure dei numeri π ed e, che pure erano conosciuti da qualche tempo, si riusciva a stabilire di che natura fossero. Questo fino all'anno 1882, allorché il matematico tedesco Louis Carl Ferdinand von Lindemann (1852-1939) – riprendendo un precedente risultato ottenuto nel 1873 dal francese Charles Hermite (1822-1901) – formulò e dimostrò un teorema che ha come corollari esattamente la dimostrazione della trascendenza dei due numeri.

3. TEOREMA (di Lindemann-Weierstrass). Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono numeri algebrici distinti (reali o complessi) e $k_1, k_2, \dots, k_n$ sono numeri interi non tutti nulli, allora l'espressione:

$$(2) \qquad k_1e^{\alpha_1} + k_2e^{\alpha_2} + k_3e^{\alpha_3} + \cdots + k_ne^{\alpha_n}$$

non può essere nulla.
Non ci soffermiamo sulla dimostrazione del teorema, ma lo faremo per i due corollari che da esso derivano.
COROLLARIO 1. **Il numero e è trascendente**.
DIMOSTRAZIONE. Se la precedente espressione (2) non è mai nulla per i valori dei parametri lì specificati, allora il numero e, sostituito alla x nella (1), non può soddisfare l'equazione e perciò non può essere soluzione di alcuna delle equazioni (1). Esso, pertanto, non può essere algebrico. Deve essere trascendente.
COROLLARIO 2. **Il numero π è trascendente**.
DIMOSTRAZIONE. Prendiamo in considerazione la celebre formula di Eulero: $e^{\pi i}+1 = 0$.
Il suo primo membro si può considerare come un caso particolare dell'espressione (2). Basta assumere nella (2): $n = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1, \alpha_1 = \pi i, \alpha_2 = 0$. Ora, dato che l'espressione $k_1\mathrm{e}^{\alpha_1} + k_2\mathrm{e}^{\alpha_2}$ è uguale a 0 e dato che k_1, k_2 sono numeri interi non nulli e 0 è un numero algebrico, il numero πi non può essere algebrico (se lo fosse l'espressione in esame sarebbe diversa da 0 per il teorema di Lindemann). Deve essere perciò trascendente. D'altro canto il fattore i è un numero algebrico. Di conseguenza π non può che essere trascendente.

4. A questo punto si conoscono due numeri trascendenti e, francamente, sembra difficile poterne immaginare altri, anche perché alcuni numeri trascendenti che erano stati costruiti nel 1844 dal matematico francese Joseph Liouville (1809-1882) non avevano riscosso particolare entusiasmo nella comunità matematica. E per dire quanto la cosa suscitasse interesse in quella comunità, basti ricordare che fra i 23 problemi proposti da David Hilbert, nella celebre conferenza che tenne l'8 agosto 1900, all'interno del II Congresso Internazionale di Matematica, in svolgimento a Parigi, uno di essi, esattamente il problema 7, poneva proprio una questione sui numeri trascendenti: «*Se a è un qualsiasi numero algebrico diverso da* 0 *e da* 1 *e b è un numero irrazionale, il numero a^b è trascendente*?»
Pare che Hilbert giudicasse questo problema come uno dei più difficili del suo elenco. In realtà, il problema fu risolto, benché solo parzialmente, dal sovietico Aleksandr Osipovič Gelfond (1906-1968) e dal tedesco Theodor Schneider (1911-1988), l'uno separatamente e indipendentemente dall'altro. Essi dimostrarono infatti un teorema idoneo allo scopo. Anche adesso ci limitiamo a fornire solo l'enunciato del teorema, oggi noto come "teorema di Gelfond-Schneider".
TEOREMA (di Gelfond-Schneider). *Se a è un qualsiasi numero algebrico, diverso da* 0 *e da* 1, *e se b è un qualsiasi numero algebrico irrazionale, allora a^b è un numero trascendente*.
Il teorema permette evidentemente di costruire innumerevoli numeri trascendenti, quali per esempio i seguenti:

$2^{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}^{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3}^{\sqrt{2}}, \quad i^i, \quad i^{-2i}$

e infiniti altri.
Anche il numero e^{π} è trascendente. Ma, a differenza dei casi precedenti, che sono pressoché evidenti, ovviamente sulla base del teorema di Gelfond-Schneider, questo richiede una spiegazione. Ebbene, basta osservare che, a partire dalla formula di Eulero, si ha in successione:

$$e^{\pi i} = -1, \quad (e^{\pi i})^{-i} = (-1)^{-i}, \quad e^{-\pi i^2} = (i^2)^{-i}, \quad e^{\pi} = i^{-2i}$$

e che i^{-2i} è un numero trascendente, proprio in base al teorema di Gelfond-Schneider.

Ritornando al problema 7 di Hilbert, al giorno d'oggi non sappiamo ancora se a^b è un numero trascendente o algebrico quando b è un numero trascendente e quindi certamente irrazionale: è una delle tante *questioni aperte* della matematica.
Cosicché, tanto per fornire qualche esempio interessante, non sappiamo se sono trascendenti o algebrici i numeri a^e e a^{π}, essendo a un numero algebrico diverso da 0 e da 1.
Un particolare numero, del quale ancora oggi non si è riusciti a stabilire se è algebrico o trascendente (né addirittura se è razionale o irrazionale), è il numero γ, così definito:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

È noto come ***costante di Eulero-Mascheroni***. Il suo valore, approssimato per difetto alla 5ª cifra decimale è 0,57721.
Sembra che Mascheroni fosse convinto che la costante γ fosse addirittura un numero razionale (e quindi algebrico), ma non ne fornì una dimostrazione.

5. A differenza del numero e^{π} che sappiamo essere trascendente, ignoriamo se lo siano pure i numeri π^e, π^{π}, e^e, benché intuitivamente, a lume di naso, saremmo disposti a scommettere che così debba essere. Ma un conto è "intuire", un altro è "dimostrare" e una dimostrazione al riguardo non esiste: altra questione aperta.
Ad ogni modo, prescindendo da questo fatto, su tali numeri vogliamo fare una breve digressione per un confronto fra di loro. Si può controllare che risulta: $e^e < \pi^e < e^{\pi} < \pi^{\pi}$. E questo confronto è assai facile eseguirlo con un breve ragionamento per quanto riguarda i numeri e^e e π^e, oppure i numeri e^{π} e π^{π}, e con uno strumento di calcolo automatico per quanto concerne il confronto fra π^e ed e^{π}.
La domanda interessante che ci poniamo è però la seguente: È possibile stabilire quale dei due numeri π^e ed e^{π} è il maggiore senza ricorrere a strumenti di calcolo automatico?
La risposta è affermativa e il procedimento per trovarla non è complicato. Ritengo che non faccia male alla salute se ne parlo, anche perché si fa ricorso ad un uso non banale dell'Analisi Matematica e, per soprammercato, si possono trarre conclusioni di carattere generale.
Prendiamo allora le mosse dalla funzione:

$$f(x) = x^{1/x},$$

continua e derivabile per $x > 0$. Si dimostra che è crescente per $0 < x < e$ e decrescente per $x > e$; è pertanto massima per $x = e$.
Raccogliendo altre informazioni, ne possiamo anche dare la rappresentazione grafica (figura 1), nella quale è pure evidenziato che la retta $y = 1$ è un asintoto destro per il grafico di $f(x)$ e che tale asintoto interseca il grafico medesimo nel punto (1,1).
Presi allora due qualsiasi numeri reali a, b, con $0 < a < b$, accade quanto segue (il grafico aiuta a capire):

- se $0 < a < b \le e$ si ha $f(a) < f(b)$, ossia $a^{1/a} < b^{1/b}$, da cui, elevando all'esponente ab entrambi i membri della disuguaglianza e semplificando, segue: $a^b < b^a$;
- se $e \le a < b$, ragionando allo stesso modo, si conclude che: $a^b > b^a$;
- se $0 < a < e < b$ bisogna distinguere i casi $a \le 1$ e $a > 1$.

Nel primo caso ($0 < a \le 1 < e < b$) il grafico della funzione mostra che $a^b < b^a$, ma questo per la verità non ci voleva molto a capirlo, anche senza il supporto del grafico. Nel secondo caso ($1 < a < e < b$) invece non possiamo concludere alcunché circa il confronto fra a^b e b^a.

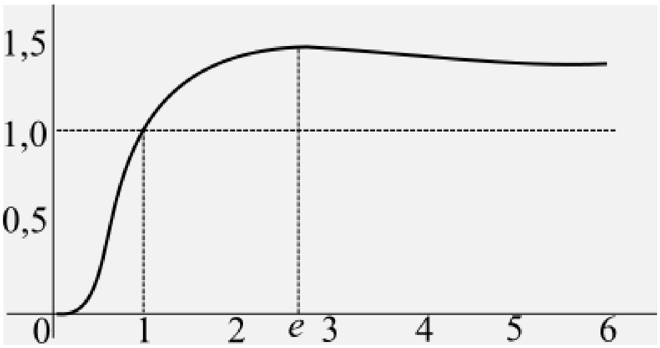

Figura 1

Per concludere, ritornando alla nostra questione, siccome $e < \pi$, risulta: $e^{\pi} > \pi^e$.
Detto a semplice titolo di curiosità, come applicazione della stessa proprietà si spiega pure che, essendo $e < 100 < 120$, risulta: $100^{120} > 120^{100}$.
Invece, essendo $0 < 1.7 < 2.5 < e$, risulta: $1.7^{2.5} < 2.5^{1.7}$. Ancora, essendo $0 < 0.7 < 1 < e < 5.9$, si ha: $0.7^{5.9} < 5.9^{0.7}$. Infine, siccome $1 < 2.3 < e < 3.2$, non possiamo concludere nulla circa il confronto fra $2.3^{3.2}$ e $3.2^{2.3}$. Ovviamente come applicazione della proprietà suddetta, giacché, con altri mezzi, per esempio ricorrendo ad uno strumento di calcolo automatico, si trova che $2.3^{3.2} < 3.2^{2.3}$.

6. In precedenza abbiamo accennato al fatto che i numeri trascendenti sono in quantità infinitamente più grande dei numeri algebrici. Vogliamo dare una veste razionale a questa affermazione.
Incominciamo col dire che vale il seguente teorema, che però non dimostriamo.
TEOREMA. I numeri algebrici (supponiamo reali, ma il discorso vale anche se sono complessi) formano un insieme infinito numerabile.
Sono ora noti i seguenti fatti:

- l'insieme dei numeri reali è più che numerabile: esattamente è un insieme che ha la potenza del continuo;
- tale insieme è formato dall'unione di due insiemi disgiunti: quello dei numeri (reali) algebrici e quello dei numeri (reali) trascendenti;
- l'insieme dei numeri (reali) algebrici è numerabile.

Ne consegue il seguente corollario.
COROLLARIO. L'insieme dei numeri (reali) trascendenti è non numerabile (precisamente ha la potenza del continuo).
Pertanto, essenzialmente, i numeri trascendenti sono in quantità infinitamente maggiore dei numeri algebrici. Faccio notare che questa conclusione asserisce in sostanza che esistono infiniti numeri trascendenti, anche se non ne fornisce un criterio costruttivo. È dovuta a Cantor e precede il teorema di Gelfond-Schneider.

Pensierino finale: *[La] dimostrazione della numerabilità dell'insieme dei numeri algebrici assicura dell'esistenza di numeri reali che non sono algebrici; tali numeri si dicono* trascendenti, *perché, come disse Eulero,* «trascendono il potere dei metodi algebrici». [Fonte: [3], pag. 151]

Riferimenti bibliografici: [B.1] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, Milano, 1968. [B.2] Carlos M. Madrid Casado, *Hilbert*, collana "Geni della Matematica", RBA Italia, Milano, 2017. [B.3] R. Courant – H. Robbins, *Che cos'è la matematica*?, Universale Bollati Boringhieri, Torino, seconda edizione, 2000. [B.4] Gustavo Ernesto Piñeiro, *Cantor*, collana "Geni della Matematica", RBA Italia, 2017. [B.5] Carlo Toffalori, *Tributo a Cantor*, MatematicaMente nn. 229-230, ISSN 2037-6367, Mathesis sezione di Verona.

[*] Già ispettore MIUR, Macerata, e-mail: giamboa906@gmail.com