ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 232 – Pubblicato il 03 – 01 – 2018

HOW OFTEN IS THE MAX OF A QUADRATIC AT AN ENDPOINT?

Len Bos [*]

Suppose that you have a quadratic polynomial $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ and you want to find its maximum value on the interval $[a, b]$. This is easy to do and everyone knows how to do it! You just find the critical point and then compare the value of $Q(x)$ there with its value at the endpoints. Typically, in examples the maximum is indeed at the critical point, and often testing at the endpoints is almost an afterthought and indeed often forgotten by many students! But if you picked a quadratic at random, what percentage of the time will the maximum actually be an endpoint? It can be surprisingly often, as it turns out!

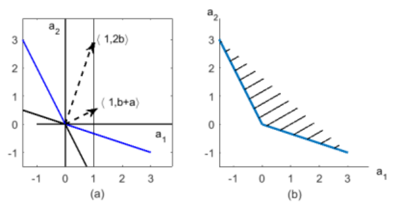

Figure 1: (a) the constraints and (b) the sector $S(a;b)$

But first we have to say what we mean by a "random" polynomial. Let's take the case when each coefficient is an independent random Normal variable with mean 0 and variance 1, i.e., $N(0,1)$. Each coefficient then has (independently) the standard normal density function

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

We are going to compute the probability then that the maximum of such a random $Q(x)$ is at an endpoint, a or b. Call this probability $\pi(a;b)$. Actually, to compute $\pi(a;b)$ we will first compute $\alpha(a;b)$, the proability that the maximum is attained at $x = a$ and $\beta(a;b)$, the probability that the maximum is attained at $x = b$. Once we have these two we use the fact that the event that the maximum is attained at *both* endpoints is zero (can you see why?) to get

$$\pi(a;b) = \alpha(a;b) + \beta(a;b) - 0. \tag{1}$$

Let's first see what $\beta(a;b)$ is. Now, the maximum is at $x = b$ if and only if $Q(x) \le Q(b)$ for all $a \le x \le b$ or, in other words iff $a_0 + a_1x + a_2x^2 \le a_0 + a_1b + a_2b^2$. Subtracting we see that this is true iff

$$0 \le a_1(b - x) + a_2(b^2 - x^2), \qquad a \le x \le b.$$

But for these values of x, $b - x \ge 0$ and so we may divide out this factor to obtain the equivalent condition

$$0 \le a_1 + a_2(b + x), \qquad a \le x \le b.$$

This is a collection of linear constraints with normal vectors $\langle 1, b + x\rangle$, $a \le x \le b$ on the pair (a_1, a_2) and it is easy to check that they hold if and only if they hold for $x = a, b$, i.e., $0 \le a_1 + a_2(2b)$ and $0 \le a_1 + a_2(b + a)$. These two constraints cut out a sector $S(a;b)$ of the (a_1, a_2) plane, as illustrated in Figure 1. Thus

$$\begin{aligned}\beta(a;b) &= \iint_{S(a;b)} f(a_1)f(a_2)\,da_1da_2 \\ &= \iint_{S(a;b)} \frac{1}{2\pi}\exp(-a_1^2/2)\exp(-a_2^2/2)\,da_1da_2 \\ &= \iint_{S(a;b)} \frac{1}{2\pi}\exp(-(a_1^2 + a_2^2)/2)\,da_1da_2\,.\end{aligned}$$

To evaluate this last integral we just switch to polar coordinates to get

$$\beta(a;b) = \frac{1}{2\pi} \iint_{r=0,\theta=0}^{r=\infty,\theta=\varphi(a;b)} r\exp(-r^2/2)\,dr\,d\theta$$

where $\varphi(a;b)$ denotes the interior angle of the sector $S(a;b)$. But this is an easy integral, and so evaluating it we get

$$\beta(a;b) = \frac{1}{2\pi}\varphi(a;b).$$

Now to find the angle $\varphi(a;b)$ we just note that it is the angle between the blue lines in Figure 1, which is perhaps most easily calculated as π minus the angle bewteen the two normal vectors $\langle 1, 2b\rangle$ and $\langle 1, b + a\rangle$. Hence

$$\begin{aligned}\varphi(a;b) &= \pi - cos^{-1}\left(\frac{\langle 1, 2b\rangle \cdot \langle 1, b + a\rangle}{\sqrt{1 + 4b^2}\sqrt{1 + (b + a)^2}}\right) \\ &= \pi - cos^{-1}\left(\frac{1 + 2b(b + a)}{\sqrt{1 + 4b^2}\sqrt{1 + (b + a)^2}}\right)\end{aligned}$$

and so

$$\beta(a;b) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - cos^{-1}\left(\frac{1 + 2b(b + a)}{\sqrt{1 + 4b^2}\sqrt{1 + (b + a)^2}}\right)\right).$$

What about the left endpoint? This is actually quite simple now. Just notice that the maximum of $Q(x)$ over the interval $[a, b]$ is attained at the *left* endpoint $x = a$ if and only if the maximum of $Q(-x)$ over the interval $[-b, -a]$ is attained at the *right* endpoint, $x = -a$. Now, switching the sign of x keeps the distribution of the coefficients the same as $Q(-x) = a_0 + (-a_1)x + a_2x^2$ and the distribution of $-a_1$ is the same as that of $+a_1$, under our assumptions. Hence

$$\alpha(a;b) = \beta(-b;-a)$$

and so

$$\alpha(a;b) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - cos^{-1}\left(\frac{1 + 2a(b + a)}{\sqrt{1 + 4a^2}\sqrt{1 + (b + a)^2}}\right)\right).$$

Finally we have by (1) that the probability of the maximum being at an endpoint is

$$\pi(a;b) = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - cos^{-1}\left(\frac{1 + 2b(b + a)}{\sqrt{1 + 4b^2}\sqrt{1 + (b + a)^2}}\right) + \right.$$

$$- \cos^{-1}\left(\frac{1 + 2a(b + a)}{\sqrt{1 + 4a^2}\sqrt{1 + (b + a)^2}}\right)\Bigg).$$

This is a rather formidable expression, so let's look at the special case of a symmetric interval, i.e., when $a = -b,\ b > 0$. Then the formula simplifies to

$$\pi(-b; b) = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4b^2}}\right)\right)$$

which in turn can be simplified to

$$\pi(-b; b) = \frac{1}{\pi}(\pi - \tan^{-1}(2b)).$$

Notice that

$$\lim_{b\to\infty} \pi(-b; b) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \lim_{b\to 0^+} \pi(-b; b) = 1.$$

Figure 2 shows its graph. Is this what you expected? After the fact perhaps it's not so surprising. As $b \to 0^+$ the interval $[-b, b]$ gets smaller and smaller an so it becomes increasingly unlikely that the critical point of $Q(x)$ is inside the interval, and so necessarily the maximum is at an endpoint, i.e., the probability should indeed tend to one as $b \to 0^+$. On the other hand, as $b \to \infty$, the interval $[-b, b]$ gets larger and larger and so it becomes increasingly probable that the critical point is inside the interval. This critical value will be the maximum precisely when the leading coefficient $a_2 < 0$, i.e., half of the time.

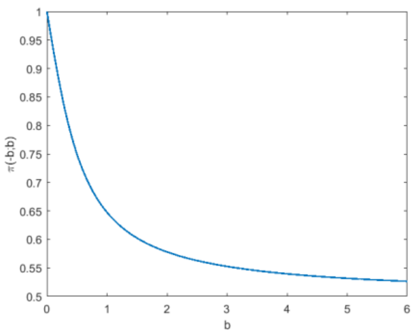

Figure 2: the graph of $\pi(-b; b)$

[*] Professore Ordinario di Analisi Numerica, Università degli Studi di Verona, e-mail: leonardpeter.bos@univr.it

Alcune considerazioni sul problema della bicicletta con le ruote quadrate

di Roberto Zanasi [**]

Uno dei due problemi assegnati lo scorso anno scolastico alla prova di matematica dell'esame di stato per i licei scientifici aveva a che fare con una bicicletta a ruote quadrate che dovevano percorrere un arco di curva [B.1]. In rete si sono letti pareri contrastanti relativi al quesito e molte polemiche (la rete è un aggregatore di polemiche, e per qualche tempo ci siamo sentiti tutti professori di matematica invece che allenatori di calcio). C'è chi ha sostenuto che il quesito fosse troppo difficile, e non affrontabile da parte di uno studente, e chi invece ha fatto notare come tutti i passaggi da svolgere fossero indicati in ordine, e che allo studente attento sarebbe bastato seguire le istruzioni già scritte e svolgere i calcoli. Un insegnante universitario mi ha detto che, per presentare e risolvere il problema del calcolo della lunghezza di una curva, servirebbero almeno due ore di lezione, perché il problema è difficile. Altri sostengono che sarebbe meglio che la scuola superiore si preoccupasse di fornire buone basi matematiche, e lasciasse le cose complicate all'università (dove per "cose complicate" spesso si intende tutta l'analisi, tanto a scuola si fa male e all'università si ripete tutto da capo).

Il mio parere di insegnante di scuola superiore è (oserei dire *naturalmente*) opposto rispetto a queste idee che vogliono relegare la scuola a palestra per l'università. A scuola si cresce, non ci si preclude nessuna possibilità, si esplora. La scuola è una opportunità per conoscersi e per conoscere. Ed è per questo che credo che non sia giusto, nei confronti degli studenti, evitare lo studio dell'analisi perché sicuramente verrà fatto in modo non rigoroso, o non tanto rigoroso come si aspetta l'università. Ed è anche per questo motivo che, da qualche anno, io insegno analisi utilizzando i metodi dell'*analisi non standard*.

Tornando quindi al problema dell'esame di stato di quest'anno, a un certo punto veniva richiesto di calcolare la lunghezza di un arco di curva: la formula necessaria veniva indicata in nota a piè di pagina, e allo studente rimaneva soltanto da fare una sostituzione ed eseguire un calcolo. Ma come si può affrontare l'argomento del calcolo di una lunghezza di una curva alla scuola superiore?

I teoremi del calcolo integrale, soprattutto se analizzati da un punto di vista non standard, offrono la possibilità di rappresentazioni grafiche che, dal punto di vista didattico, sono molto efficaci. In sostanza, la formula per il calcolo della lunghezza di una curva deriva dal teorema di Pitagora (certo, il livello di rigore che si adotta alla scuola superiore non è così elevato come quello che si usa all'università, e non dubito del fatto che servano anche due ore per approfondire l'argomento: esistono teoremi di analisi la cui lista delle ipotesi è più lunga della loro dimostrazione, e Whitehead e Russell hanno impiegato quasi 400 pagine dei Principia Mathematica per dimostrare che 1 + 1 = 2, quindi non c'è limite al rigore). Credo però che sia nostro compito, come insegnanti di scuola superiore, dare un'idea di come sia nata una formula, mentre il lavoro del Vero Matematico consiste nel riordinare le proprie idee, ripulire tutto, buttare via i tentativi falliti, mettere in ordine, e consegnare al pubblico un teorema perfettamente costruito, ottimamente riassunto e sintetizzato, in modo tale che lo studente che lo studia per la prima volta possa esclamare: "Ma come gli è venuto in mente? Io non avrei mai pensato una cosa del genere!".

Nell'analisi non standard il calcolo della lunghezza di una curva "dotata di buone proprietà" avviene in questo modo: si suddivide l'intervallo $[a, b]$ lungo il quale si vuole calcolare la lunghezza della curva in infinite parti di ampiezza infinitesima dx; per ogni punto x di questa suddivisione si esplora con un microscopio a ingrandimeno infinito cioè che avviene intorno al punto della curva $(x, f(x))$. Ciò che si osserva è che la curva è indistinguibile dalla retta tangente a essa nel punto fissato, come in figura 1.

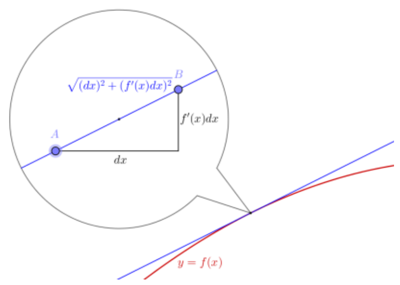

Figura 1

Ecco allora che la distanza tra i punti A e B può essere calcolata col teorema di Pitagora e risulta

$$\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{(dx)^2\left(1 + \left(f'(x)\right)^2\right)} = \sqrt{(1 + (f'(x))^2)}\,dx,$$

un infinitesimo. Questo procedimento viene ripetuto per tutti i punti della suddivisione fatta, e infine tutti i segmenti infinitesimi vengono sommati mediante un integrale. La formula risultante è quindi questa:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx.$$

Concludo con una domanda: vogliamo, noi insegnanti di scuola superiore, far vedere agli studenti come funzionano le cose? Vogliamo rinunciare a un po' di rigore, per poter fare qualche disegno in più e mostrare come sono nate certe idee, fuggendo dalla tentazione di presentare una formula "che vi spiegheranno all'università, per ora imparatela a memoria"? Perché se non lo facciamo noi, non lo farà nessun altro.

Riferimento bibliografico: [B.1] MIUR, I043 – Esame di Stato di Istruzione secondaria superiore, Indirizzi: LI02, EA02 – Scientifico; LI03 – Scientifico – Opzione Scienze Applicate – Tema di Matematica – Problema 1.

[**] ITIS Enrico Fermi di Modena – email: roberto.zanasi@gmail.com