ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 233 – Pubblicato il 02 - 02 - 2018

L'analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi

Leonardo Aldegheri [1], Bruno Stecca [2]

1. Abstract

In questo breve intervento ci si propone di presentare il testo "Istituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana" di Maria Gaetana Agnesi, del 1748, cercandovi legami con l'analisi non standard. Il lavoro, dopo una breve presentazione storica del testo, vuole esaminare la semplice illustrazione che nel testo viene fatta degli infinitesimi e descrivere il modus operandi impiegato dalla Agnesi, basato sulla geometria e la proporzione. Si mostrerà, poi, l'uso fatto dalla matematica italiana della sottotangente e si proporranno semplici e brevi esempi, tratti dall'opera, di quanto in precedenza accennato.

2. Introduzione

Nel XIX secolo, soprattutto per l'opera di Weierstrass e Cauchy, l'analisi di Newton e Leibniz fu abbandonata perché considerata poco rigorosa. Il cosiddetto Calcolo fu rifondato sulla definizione del concetto di limite, perno di quella che oggi possiamo chiamare l'analisi standard. L'analisi non standard fu inaugurata da Abraham Robinson negli anni Sessanta, riprendendo il percorso iniziale fondato sugli infinitesimi, con il rigore necessario atto a superare le critiche e la forte opposizione sollevata inizialmente. Robinson stesso nel suo testo "Analisi non standard" cita Leibniz come precursore della teoria che sta sviluppando.
Con lo sguardo retrospettivo sul percorso storico che oggi consente il recupero dei metodi iniziali, possiamo chiederci come veniva insegnata l'analisi nel '700, cioè prima che Weierstrass e Cauchy, insieme a molti altri, le dessero l'impostazione oggi diffusa, che abbiamo chiamato standard.
Le prime trattazioni di calcolo infinitesimale si trovano in vari testi, dai più antichi, scritti da de l'Hôpital, che tra i primi struttura il lavoro di Leibniz, a quelli più maturi scritti da Eulero, in latino. Uno dei più famosi manuali di analisi del '700, in italiano poi tradotto in inglese e francese, è "Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana" di Maria Gaetana Agnesi, pubblicato a Milano nel 1748 [3].
Nata a Milano nel 1718, ad appena trent'anni, dopo aver assimilato la lezione analitica dei testi di de l'Hôpital, l'Agnesi scrive un manuale per facilitare lo studio dell'analisi da parte degli studenti universitari. Il testo riceve subito l'approvazione di Maria Teresa d'Austria, alla quale l'opera è dedicata, e del papa Benedetto XIV, che le offrirà una cattedra a Bologna, peraltro mai occupata dall'Agnesi.
Pochi anni dopo, in seguito alla morte del padre, l'Agnesi lascerà definitivamente il mondo scientifico e gli studi matematici, per dedicarsi alle opere di carità e all'assistenzialismo fino all'anno della sua morte, che avviene a Milano nel 1799.
Ci proponiamo di illustrare come l'Agnesi raggiunga risultati fondamentali dell'analisi moderna, utilizzando con naturalezza e semplicità gli infinitesimi, grazie ad un metodo di esemplare efficacia e chiarezza, basato sui risultati classici della geometria. Il testo della matematica milanese, diviso in due tomi, consta di quattro libri. Il primo "Dell'Analisi delle Quantità finite" tratta l'algebra e la risoluzione delle equazioni; il secondo "Del Calcolo Differenziale", tratta appunto del problema della derivata; il terzo "Del Calcolo Integrale", tratta il problema dell'integrazione; il quarto "Del Metodo Inverso delle Tangenti", ha come argomento le equazioni differenziali.
In questa sede concentriamo la nostra attenzione sull'inizio del secondo libro.

3. Le definizioni da cui parte il testo

All'inizio del libro secondo delle Istituzioni Analitiche, il libro dedicato al calcolo differenziale, l'Agnesi introduce le definizioni fondamentali per tale calcolo: le quantità variabili o fluenti e le loro differenze o flussioni. Leggiamo dal testo originale: "Col nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come fluenti, e per così dire, generate da un moto continuo." [4]
E in seguito: "Si chiama differenza, o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima, cioè tanto piccola, che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui crescendo, o diminuendosi la medesima variabile, possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima." [5]
Chiariamo il concetto di differenza infinitesima con una immagine tratta dal testo dell'Agnesi e opportunamente precisata, (Figura 1). Si prenda la curva AM con P ascissa di M e si consideri "una porzione infinitesima Pp, sarà essa la differenza, o sia la flussione dell'ascissa AP, e si potranno considerare per eguali le due AP, Ap, non essendovi proporzione tra la quantità finita AP, e la porzione infinitesima Pp." [6]

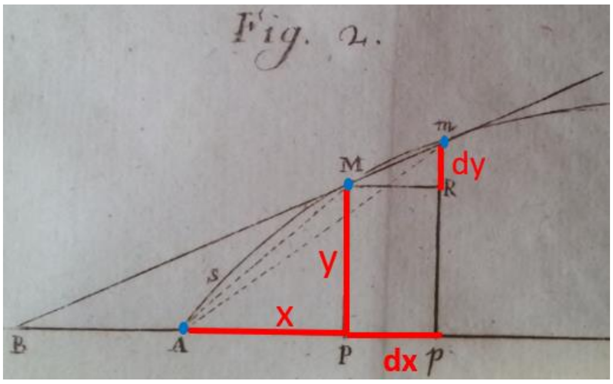

Figura 1. Illustrazione del concetto di differenza infinitesima. La figura è una rielaborazione della figura originale numero 2 del testo dell'Agnesi, tratta dalle tavole in appendice al volume.

Nelle parole dell'Agnesi ritroviamo i riferimenti alla simbologia di Leibniz ormai diffusa in tutti gli approcci al calcolo differenziale: "La Caratteristica, con cui soglionsi esprimere le differenze, è la lettera d, quindi posta l'ascissa AP = x, sarà Pp, o MR = dx; e similmente posta l'ordinata PM = y, sarà Rm = dy."
Un ragionamento analogo si può fare, precisa l'autrice, per l'arco AM di cui Mm è una flussione e per l'area sottesa da AM, di cui quella sottesa da Mm è un flussione.
L'Agnesi tiene poi subito a precisare che queste quantità infinitesime non sono dei semplici artifici, ma sono delle quantità reali. "Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl'Antichi de'

Poligoni inscritti, e circoscritti, si può chiaramente vedere dal solo idearli, che l'ordinata MN (Fig. 4.) si vada continuamente accostando alla BC, finché con essa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che quelle due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale posizione sieno BC, FE, adunque BF, CD saranno quantità minori di qualunque data, e perciò inassegnabili, o sia differenze, o flussioni." [7]
È da specificare che il termine "differenza inassegnabile, cioè minore di qualsiasi quantità data" corrisponde, nelle definizioni attuali, a differenza infinitesima, cioè minore di $1/n$, per ogni n naturale. Sotto, la figura originale cui fa riferimento l'Agnesi.

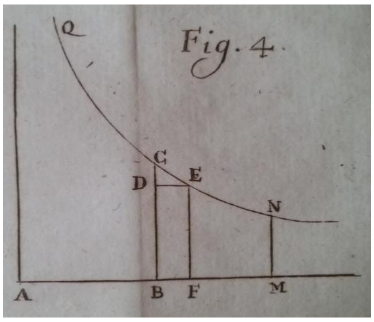

Figura 2. Figura originale a cui fa riferimento l'Agnesi per illustrare il concetto di differenze inassegnabili.

4. Incommensurabilità e infinitesimi

A riprova della realtà delle differenze infinitesime l'Agnesi, ancora prima di inoltrarsi nei calcoli differenziali, precisa che tali quantità entrano in maniera determinante nella geometria. Tali differenze infinitesime sono infatti per l'Agnesi responsabili della distinzione tra grandezze commensurabili e grandezze incommensurabili.
"… con la sola comun Geometria è sicuro, che non solo queste (le differenze), ma altre quantità minime di classi infinite entrano realmente a formare l'estensione geometrica" … "Ed in fatti sia a cagion d'esempio (Fig. 5.) AB il lato, ed AC il diametro d'un quadrato, le quali due linee per l'ultima proposizione del libro 10 di Euclide sono fra loro asimmetre, vale a dire incommensurabili. Dico per tanto: che non sono esse rese tali da una qual si sia finita lineeta CE, per quanto piccola essa si prenda, ma bensì da un'altra infinitamente minore, cioè della classe delle infinitesime." [8]

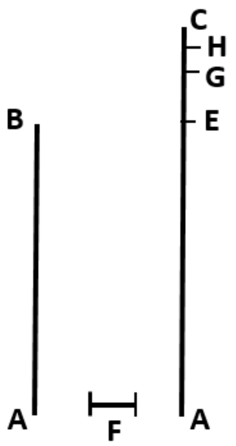

Figura 3. Illustrazione del concetto di incommensurabilità spiegato mediante le differenze infinitesime.

Ripercorriamo il ragionamento che la matematica milanese fa per giustificare il fatto che l'incommensurabilità sia dovuta a quantità infinitesime, rifacendoci alla figura 3, che riprende esattamente la figura 5, appena citata del testo originale. Fingiamo che sia il segmento finito EC che rende incommensurabili AB e AC e che quindi la restante AE sia commensurabile ad AB.
Consideriamo F unità di misura di entrambi AB e AE; tale F non può essere commensurabile ad EC altrimenti AB e AC sarebbero commensurabili, dovrà essere maggiore o minore di EC.
Se EC è maggiore di F, sottraendo la seconda dalla prima si ottiene GC: AB e AG saranno commensurabili, non era la grandezza finita EC che rendeva incommensurabili AB e AC. A rendere incommensurabili i due segmenti è allora la grandezza finita GC; possiamo poi trovare un sottomultiplo di F più piccolo di GC che sottratto a GC faccia restare HC, quantità finita che giustifichi l'incommensurabilità ma … riprendendo le parole dell'Agnesi: "replicato il discorso, non è quella che rende incommensurabili le linee AB, AC; ed atteso che il raziocinio vale per qual si sia grandezza finita, si conchiuda, che la incommensurabilità procede da una quantità inassegnabile minore di qualunque data." [9]

Gli infinitesimi per l'Agnesi sono effettivi enti geometrici che contribuiscono all'estensione delle figure, rendendo anche ragione dell'incommensurabilità. Alla luce delle conoscenze attuali si tratta però di un errore: oggi sappiamo che il rapporto di due grandezze omogenee è un numero reale (positivo): un numero razionale nel caso di grandezze commensurabili, irrazionale nel caso di grandezze incommensurabili. L'incommensurabilità quindi non è causata dagli infinitesimi, numeri di tipo diverso dai reali.
Il procedimento della Agnesi, che cerca di rendere sempre più piccola la differenza che giustificherebbe l'incommensurabilità tra due segmenti, in realtà non risolve il problema; non si elimina infatti l'incommensurabilità tra i segmenti maggiori.
Volendo dimostrare che le quantità infinitesime entrano realmente a formare l'estensione geometrica, l'Agnesi attribuisce loro, nel contesto dell'incommensurabilità, un significato ontologico che non possono avere.

5. L'arco infinitesimo di qualsivoglia curva ha le proprietà dell'arco di cerchio

Dopo aver introdotto il concetto di differenza infinitesima, l'Agnesi enuncia e dimostra alcuni teoremi, seguiti ciascuno da diversi corollari, che ritiene indispensabili per formare nello studente, che si sta cimentando nella lettura del testo, il corretto utilizzo delle differenze infinitesime. Scegliamo di illustrare il primo teorema che la matematica milanese dimostra e il relativo quarto corollario.
Teorema I: "Sia una qualunque curva MBC, (Fig. 7.) ed una porzione di essa BC infinitesima del primo ordine. Da' punti B, C si conducano perpendicolari alla curva le rette BA, CA. Dico: che le rette BA, CA si potranno assumere per eguali." [10]

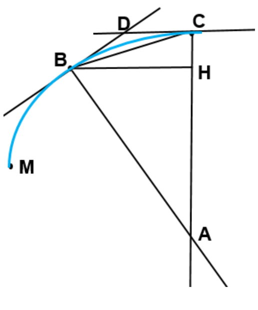

Figura 4. Le proprietà dell'arco infinitesimo, come da figura 7, nel testo originale

Corollario IV: "Da ciò si raccoglie, che un'arco qualunque infinitesimo BC di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell'arco di circolo descritto col centro A, e raggio AB, o AC."[11]
Consideriamo, con riferimento alla figura 4, la curva qualsiasi MBC e una sua parte infinitesima BC del primo ordine. Conduciamo le perpendicolari alla curva BA e CA, che si incontrano in A, le tangenti BD e CD e la corda BC. Supponiamo che CA e BA siano diverse, con CA maggiore e conduciamo la perpendicolare BH a CA; la differenza tra CA e BA sarà minore di CH e CH sarà minore della corda BC, per l'angolo retto in H. La corda BC, avendo supposto l'arco BC infinitesimo del primo ordine, è anch'essa infinitesima del primo ordine. Dunque la differenza tra BA e CA, non è maggiore di una quantità infinitesima del primo ordine e BA, CA potranno assumersi uguali. [*Segue al n.* 234]

[1] Liceo Scientifico A. Messedaglia di Verona
[2] Già docente del Liceo Classico S. Maffei di Verona