ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 234 – Pubblicato il 02 - 03 - 2018

L'analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi

Leonardo Aldegheri [1], Bruno Stecca [2]

[*Segue dal numero 233*]

6. Infinitesimi del secondo e terzo ordine

Per l'Agnesi, non solo devono essere chiare le differenze delle grandezze variabili, chiamate *dx* e *dy*, ma si deve avere un'idea corretta anche delle differenze seconde, che si esprimono con la simbologia *ddx* o d^2x, terze ed ennesime; devono essere chiarite immediatamente, con la terminologia moderna, le derivate successive. Prendiamo le mosse ancora da un teorema e da un suo relativo corollario tratti dal testo Istituzioni Analitiche, per arrivare rapidamente ad alcuni risultati interessanti, centrali anche nell'analisi moderna.
Teorema III: "Se nel circolo si prenda un'arco infinitesimo del primo ordine, dico che il seno verso [12] sarà quantità infinitesima del secondo, e la differenza fra il seno retto e la tangente sarà infinitesima del terzo."
Corollario I: "E poiché la tangente è sempre maggiore dell'arco, l'arco della corda, e la corda del seno retto; potendosi assumere per eguali la tangente, ed il seno retto, giacché non differiscono se non per una infinitesima del terzo, si potranno anco assumere per eguali la tangente, l'arco, la corda, ed il seno retto." [13]

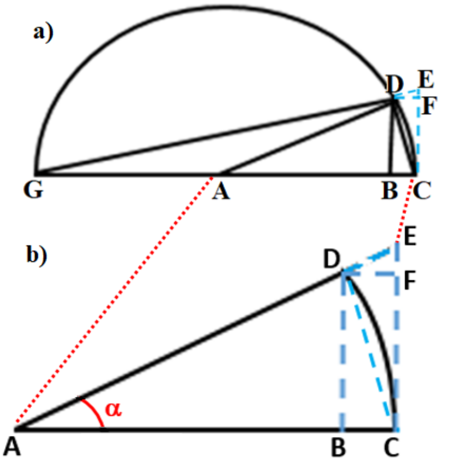

Figura 5. Relazione tra un arco infinitesimo e il corrispondente seno verso (a). Relazione tra seno verso, seno e tangente, di un arco infinitesimo (b).

Seguendo l'Agnesi, dimostriamo i due enunciati e perveniamo con lei ai risultati che sono significativi.
Consideriamo la figura 5a. Sia DC arco infinitesimo del 1° ordine, DB il seno retto o seno e CE la tangente. Si conduca la parallela DF ad AC. Per il secondo teorema di Euclide vale: GB : BD = BD : BC; poiché GB è quantità finita e BD, infinitesima del 1° ordine, come l'arco di cui è seno, così sarà BD infinitamente maggiore di BC, che quindi sarà un infinitesimo del 2° ordine, come DF.
Poiché *senoverso*(α)=BC, abbiamo che il *senoverso* è una quantità infinitesima del 2° ordine. Per la dimostrazione del corollario riferiamoci alla figura 5b. Dalla similitudine dei triangoli ABD e DFE, otteniamo AB : BD = DF : FE; poiché AB è una quantità finita, infinitamente maggiore di BD, che è infinitesima del 1° ordine, così essendo DF infinitesima del 2° ordine, FE lo è di 3° ordine: FE, differenza fra seno e tangente, è flussione del 3° ordine. Poiché tangente e seno differiscono per una quantità infinitesima del 3° ordine, possiamo assumere uguali tangente, arco, corda e seno.
Troviamo un chiaro riferimento a quanto sostenuto e ben dimostrato dall'Agnesi nell'analisi moderna. In essa il seno verso di un angolo α, è presente in due limiti notevoli:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad\qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Alla luce della dimostrazione grafica dell'Agnesi il primo limite non dice altro se non che il seno verso di x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a x, quindi il limite è 0. Il secondo specifica che il seno verso di x è un infinitesimo dello stesso ordine rispetto a x^2 e il confronto tra infinitesimi porta infatti a constatare che il limite del loro rapporto è un numero reale diverso da 0.
Per quanto concerne il fatto che la differenza fra il seno e la tangente sia infinitesima del terzo ordine, basta ricordare gli sviluppi di Taylor-McLaurin:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \qquad \tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots$$

Il tutto è quindi straordinariamente coerente con quanto sostenuto e dimostrato dall'Agnesi, con il vantaggio, pregevolissimo, che l'Agnesi ottiene queste considerazioni servendosi di semplici ragionamenti geometrici, alla portata di studenti alle prime armi.

7. Riflessioni dell'Agnesi sulle "linee infinitesime"

Dopo aver esposto i primi teoremi utili al calcolo differenziale l'Agnesi si sofferma a ragionare e meditare su quanto illustrato per fornirne ulteriori ragioni. Ci soffermiamo in particolare su uno scolio [14], dove la matematica milanese espone alcune caratteristiche delle quantità infinitesime che sta studiando, sottolineando come questi fondamentali elementi dell'analisi possano essere utilizzati grazie alla geometria elementare.
Leggiamo: "Per iscansare poi i paralogismi, ne' quali pur troppo è facile incorrere, gioverà il riflettere, che nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine, conforme si pratica anco nelle finite, ânno a considerarsi due importanti circostanze, cioè la loro grandezza, e la loro posizione. E quanto alla grandezza non credo, che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che credono tali grandezze infinitesime un mero nulla.
Ora sebbene le quantità col diminuirsi all'infinito passano da genere a genere, le proporzioni in qualunque ordine persistono le medesime; e perché di tre linee della stessa classe può costituirsi un triangolo, si noti, che minorandosi proporzionalmente i lati sino a far transito da un grado all'altro, non si mutano gli angoli, che sempre fra loro la stessa ragione conservano.
In tali incontri non è mai lecito prendere una linea per l'altra, nè fingere eguaglianza, o adequazione … Ma se due grandezze di qual si sia ordine diferiranno per una grandezza, che rispetto a loro sia inassegnabile, sicuramente, e senza rischio alcuno d'errare, una si può prendere per l'altra, nè v'è timore, che l'adequamento porti un minimo sconcerto."[15]
Quindi: i segmenti infinitesimi vanno studiati nel contesto opportuno di una determinata situazione geometrica (la loro posizione). Inoltre sono dotati di una grandezza caratteristica, pur infinitamente piccola, e l'errore più grande che si può fare su di essa è

considerarla nulla.
Ciò che rende significativo lo studio con gli infinitesimi è, poi, che se consideriamo due figure simili, una fatta di grandezze finite e l'altra fatta di infinitesimi, pur essendo le grandezze di tipologia diversa, gli angoli non mutano e le proporzioni si mantengono. Grazie alla geometria possiamo muoverci dalle grandezze finite a quelle infinitesime e viceversa. Infine, l'ulteriore significativo pregio dell'uso delle grandezze infinitesime è che se due grandezze non infinitesime, ad esempio due segmenti, differiscono per un infinitesimo, è lecito confondere una con l'altra.

8. Alcune regole di differenziazione

Nel prosieguo del testo, il manuale tratta le regole per differenziare ogni quantità, sia essa una differenza, una somma, un prodotto, un quoziente di due o più quantità, e giunge ben presto a differenziazioni abbastanza complesse. Interessante per noi è riportare la deduzione delle regole per differenziare un prodotto e un quoziente, ottenute in modo meravigliosamente breve, semplice ed efficace.
Leggiamo: "…se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili, come $x\,y$, mentre x diviene $x + dx$, la y diviene $y + dy$, ed $x\,y$ diviene $x\,y + y\,dx + x\,dy + dx\,dy$, che è il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta $x\,y$, rimane $y\,dx + x\,dy + dx\,dy$; ma $dx\,dy$ è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell'altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e $dx\,dy$ è il rettangolo di due infinitesime, e però infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di $x\,y$ sarà $x\,dy + y\,dx$." [16]
Relativamente ad un quoziente leggiamo: "La formola da differenziarsi sia una frazione, per esempio, x / y. Si ponga $x / y = z$, sarà dunque $x = z\,y$, e però anche eguali le loro differenze, cioè $dx = z\,dy + y\,dz$, quindi $dz = (dx - z\,dy) / y$, ora $z = x / y$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z, sarà $dz = dx/y - xdy/yy = (ydx - xdy) / yy$; ma se $z = x / y$, sarà dz il differenziale di x / y, dunque il differenziale di x / y sarà $(-x\,dy + y\,dx) / yy$." [17]
Notiamo subito che per la Agnesi il differenziale è la differenza infinitesimale (oggi diremmo incremento infinitesimo), come anche in Robinson, fatto che rende la trattazione naturale e conseguente. È immediato osservare che le regole di derivazione, con l'uso dei differenziali e della simbologia di Leibniz, diventano subitanee ed evidenti anche per il lettore meno esperto e le loro dimostrazioni risultano non laboriose, brevi e di immediata comprensione. È significativo, a questo proposito, sottolineare che i testi moderni di scuola secondaria hanno bisogno di almeno tre pagine per giustificare tali formule. Essi ritengono indispensabile introdurre la regola della derivata del quoziente facendola precedere dalla regola della derivata della funzione reciproca, anche allo scopo di giustificare meglio il quadrato al denominatore nella derivata del quoziente, accorgimenti del tutto superflui nella trattazione settecentesca, più spontanea e meno artificiosa.

9. La sottotangente e la sottonormale

Vogliamo, infine, inoltrarci in qualche particolare applicazione analitica legata al calcolo differenziale presente nel testo della Agnesi. Abbiamo scelto di presentare rapidamente la trattazione che fa la matematica milanese della sottotangente e della sottonormale ad una curva; tali segmenti risultano tanto fondamentali per l'Agnesi, che ne fa largo uso, quanto sconosciuti ai giorni nostri.

In figura 6, consideriamo la curva ADF, la tangente in D, che interseca l'asse X in T, e la normale in D, che interseca l'asse X in N. Essendo B la proiezione di D sull'asse X, chiamiamo il segmento TB sottotangente e il segmento BN sottonormale. Il procedimento per il loro calcolo è generalizzabile a qualsiasi curva. Consideriamo la curva ADF, la sua tangente in D e l'arco di curva DF infinitesimo del primo ordine rispetto alla curva. Da quanto visto, GF è infinitesima rispetto a EF così come la differenza fra DF e DG è infinitesima rispetto all'arco DF. Si possono allora assumere uguali EF e EG, DF e DG. Si avrà quindi AB = x, BD = y, EF = EG = dy, BC = DE = dx, DF = DG = $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. I triangoli simili GED e DBT ci danno GE : ED = DB : BT, cioè $dy : dx = y$: BT. Avremo quindi: $BT = ydx/dy$, formula della sotto-tangente. Nell'uso moderno tale formula è stata abbandonata in favore dell'equazione della retta tangente alla curva in (x_0, y_0): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ che si può ricavare dalla stessa proporzione.

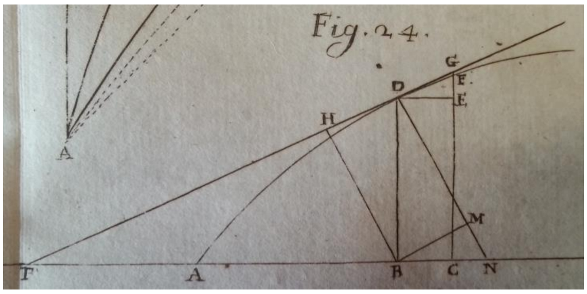

Figura 6. Originale figura dell'Agnesi che illustra il concetto di sottotangente TB e di sotto-normale BN.

Aggiungendo la normale DN in D e ragionando sulla similitudine dei triangoli GDE e DBN, dalla proporzione DE : EG = DB : BN ($dx : dy = y$: BN), otteniamo: $BN = ydy/dx$, formula della sotto-normale.
Riportiamo anche la prima e più semplice applicazione che l'Agnesi propone, riferita alla curva ADF (Figura 6), nel caso che rappresenti la parabola, che l'Agnesi chiama apolliniana, di equazione $ax = yy$, cioè, in linguaggio moderno, la funzione radice quadrata. Con il metodo delle differenze, la trattazione giunge in breve a determinare la sottotangente. Seguiamo i semplici calcoli che portano alla regola AT = AB, cosa verificabile con le tecniche moderne per la parabola di asse X: differenziando avremo $adx = 2ydy$, e $dx = 2ydy/a$. Sostituito pertanto questo valore in luogo di dx nella formula generale della sottotangente ydx/dy, avremo $2yy/a$, oppure $2x$, cioè la sottotangente nella parabola è doppia dell'ascissa, intendendo così, con riferimento alla figura 6, che il segmento sottotangente rispetto al punto D della curva è il doppio della distanza tra l'ascissa di D e il vertice della parabola.

Bibliografia: [B.1] AGNESI M. G. Agnesi, *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, Regia-Ducal corte, Milano 1748. [B.2] ROBINSON A., *Analisi non standard*, Aracne, Roma 2013. [B.3] MINONZIO F., *Chiarezza e metodo; l'indagine scientifica di Maria Gaetana Agnesi*, Lampi di Stampa, Milano 2006. [B.4] GOLDONI G., *Il professor Apotema insegna… I numeri iperreali*, Modena 2017. [B.5] GOLDONI G., *Il professor Apotema insegna… Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*, Modena 2014.

Nota: *Le formule di questo articolo, citate dall'originale, seguono la notazione moderna, lievemente diversa da quella dell'Agnesi.*

Ringraziamenti: *Si ringrazia la Biblioteca "Stimate" di Verona, per aver consentito la consultazione del testo originale, lasciando inoltre la possibilità di fotografarne le figure, alcune delle quali sono state inserite in questo intervento.*

[1] Liceo Scientifico A. Messedaglia di Verona
[2] Già docente del Liceo Classico S. Maffei di Verona

[3] Il testo è disponibile on line in una versione OCR scarsamente fruibile. Per ragguagli sul lavoro di ripulitura e di messa a punto di tale versione: https://bitbucket.org /zambu/agnesi. [4] Agnesi M. G. *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, cit. p. 432. [5] Ivi, p. 433. [6] Ibidem. [7] Ivi, pp. 434-435. [8] Ivi, p. 435. [9] Ivi, p. 436. [10] Ivi, p. 438. [11] Ivi, p. 440. [12] Ricordiamo che, nell'analisi del '700, per "seno verso" dell'angolo α si intende la quantità $1 - \cos\alpha$, mentre con l'espressione "seno retto" si intende il comune $\operatorname{sen}\alpha$. [13] Ivi, pp. 443-444. [14] Lo scolio era una parte degli antichi testi scientifici, posta a conclusione di un capitolo o di una trattazione che andava a trarre i punti focali di quanto esposto. [15] Ivi, pp.456-457. [16] Ivi, p. 458. [17] Ivi, pp. 459-460.

Questo lavoro è stato presentato dagli autori durante il Convegno di Analisi Non Standard tenutosi a Venezia il 30 settembre 2017 ed è in corso di pubblicazione negli Atti del Convegno a cura della casa editrice Aracne.