

Sul teorema di Hahn-Banach per due sottoinsiemi convessi e complementari

di Domenico Lenzi ^[*]

Premessa

Sia dato un piano \mathcal{E} della Geometria Assoluta (onde utilizzeremo la geometria euclidea prescindendo dal V postulato di Euclide ^[1]). Qui, come richiesto da Giangiacomo Gerla e Annamaria Miranda in [B.1], daremo – limitatamente a due sottoinsiemi non vuoti \mathcal{R} e \mathcal{V} di \mathcal{E} che siano convessi e complementari tra loro – una dimostrazione semplice e diretta del teorema di Hahn-Banach espresso in forma geometrica. Cioè, faremo vedere che esiste una retta tale che i punti di \mathcal{R} giacciono su uno dei due semipiani aperti delimitati da detta retta ed eventualmente su una semiretta di quella, mentre i punti di \mathcal{V} giacciono sull'altro semipiano aperto ed eventualmente sulla semiretta complementare.

Noi qui useremo in maniera determinante la Proprietà di Pasch (che – come è noto – è equivalente a quella dell'esistenza dei semipiani). Essa afferma che in un piano, se una retta che non passa per alcuno dei vertici P, S, T di un triangolo incontra il lato PS del triangolo, allora incontra anche uno degli altri due lati. La proprietà si trasporta immediatamente a un quadrilatero non intrecciato del piano, dato che ciascuna delle due diagonali di questo lo suddividono in due triangoli. Per facilitare la comprensione dell'esposizione, i punti di \mathcal{R} li diremo *rossi*, mentre gli altri li diremo *verdi*. Il linguaggio dei colori non è molto usato in matematica, a parte alcuni settori particolari come la Teoria dei Grafi (si pensi al Teorema dei quattro colori). Noi qui vogliamo che ci si renda conto di come, a volte, quel linguaggio possa aiutare a tenere a mente alcune questioni basilari, rendendo più chiare e accessibili le varie argomentazioni.

Dato un segmento (chiuso) PS, conveniamo di fare tacito riferimento al suo ordinamento naturale in cui P precede S.

Qui, rinunciando anche alla completezza delle rette di \mathcal{E} rispetto ai loro due ordinamenti naturali, noi richiediamo la seguente proprietà, che nel caso di un *piano reale* è:

(1) *In ogni retta RV esiste un punto Q tale che i punti della retta che precedono Q sono rossi, mentre i punti che seguono Q sono verdi.*

Q è detto punto di separazione per il segmento (o per la retta) RV tra punti rossi e punti verdi. Esso è indifferentemente un punto rosso o un punto verde e può coincidere con un estremo di RV .

Osservazione 1. È chiaro che i punti della retta RV che precedono R sono rossi, mentre quelli che seguono V sono verdi.

Osservazione 2. Se PST è un triangolo di \mathcal{E} con i vertici che hanno lo stesso colore, allora tutti i punti di PST sono di quel colore. Infatti, dato che ogni triangolo è convesso, i lati di PST hanno lo stesso colore dei vertici; quindi, anche i punti interni hanno quello stesso colore.

Presi due punti R e R' , dato che non tutti i punti di \mathcal{V} possono stare sulla retta RR' , si consideri un punto T non allineato con RR'

e lo si congiunga con il punto R interno a RR' . Quindi si fissi un punto V sul segmento RT oltre T ^[2].

Ora si consideri il punto in cui la retta $R'T$ incontra il lato RV . Questo non può essere rosso. Perciò V non può essere punto di separazione per il segmento RV . Similmente ^[3], V non può essere punto di separazione per il segmento $R'V$.

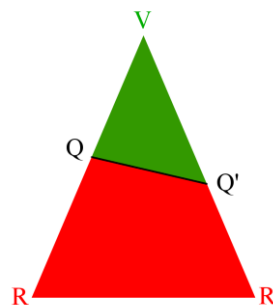
Teorema 3. Si consideri il triangolo RVR' della precedente costruzione con i punti Q e Q' , che sono rispettivamente di separazione per i segmenti RV e $R'V$ (si veda la figura) ^[4]. Allora i punti del sottoinsieme \mathcal{V}^* di RVR' non situati sui lati e giacenti dalla parte di V , rispetto a QQ' , sono tutti verdi, mentre i punti del sottoinsieme residuo \mathcal{R}^* di RVR' non situati sui lati sono tutti rossi.

Dim.: Infatti, essendo ciascun punto U di \mathcal{V}^* interno al triangolo QVQ' , esso è situato su di un segmento i cui estremi sono rispettivamente interni al segmento QV e al segmento $Q'V$.

Poiché questi sono verdi – essendo Q e Q' punti di separazione rispettivamente per VR e per VR' – anche U sarà verde. Per ragioni simili i punti di \mathcal{R}^* sono rossi.

Nota Bene. Poiché ciascun punto di \mathcal{R}^* è interno al quadrilatero $QRR'Q'$ ^[5], esso non può essere di separazione tra punti rossi e punti verdi. Un

discorso analogo vale per i punti del triangolo QVQ' .



Una semplice dimostrazione

Ora per \mathcal{R} e \mathcal{V} vedremo una semplice dimostrazione del Teorema di Hahn-Banach.

Facendo riferimento al triangolo del Teorema 3 (si veda la figura qui sopra), basta provare che i punti del semipiano aperto \mathcal{S} delimitato dalla retta QQ' , in cui giace V sono tutti verdi, mentre quelli dell'altro semipiano aperto sono tutti rossi.

L'asserto già sussiste per i punti di \mathcal{S} che sono situati sul triangolo QVQ' . Perciò consideriamo un punto A di \mathcal{S} che sia esterno a QVQ' . Congiungiamo A con un punto C , interno al segmento QQ' . Grazie alla Proprietà di Pasch, la retta AC deve incontrare uno dei lati QV o $Q'V$ in un punto verde B (poiché anche questo è diverso da Q e da Q'). D'altro canto, la retta AC deve incontrare anche uno dei lati QR , RR' o $Q'R'$ ^[6] in un punto rosso D [poiché, anche questo, è diverso da Q e da Q']. Perciò A non può essere rosso, poiché in tal caso i punti del segmento AD dovrebbero essere tutti rossi. Il che è assurdo, dato che B giace su AD .

Analogamente si prova che i punti dell'altro semipiano aperto sono tutti rossi.

Note: [1] Noi prescindiamo anche dai postulati su circonferenze e rettangoli, utilizzando soltanto le proprietà dei segmenti e triangoli, compresa quella di Pasch, che sono indipendenti dalle altre. [2] Qui e nel seguito per quanto riguarda i colori si tenga presente l'Osservazione 1. [3] Ragionando rispetto alla retta RT . [4] Poiché può aversi $Q = R$ o anche $Q' = R'$, il quadrilatero $QRR'Q'$ può ridursi a un triangolo o al segmento RR' . [5] Nel

senso che non è situato sui lati di QRQ' . [6] Ciò è ovvio se $QQ' = RR'$; altrimenti basta applicare la proprietà di Pasch.

Bibliografia: [B.1] G. Gerla, A. Miranda. *Insiemi convessi con complemento convesso*. MatematicaMente N. 228 (2017), ISSN: 2037-6367.

[*] Già docente di Matematica presso l'Università del Salento, Lecce

Deriva genetica: il ruolo del caso

di Luciano Corso

[Segue dal numero 235]

Rispetteremo le seguenti condizioni: 1) ogni individuo può avere da 0 a 5 figli; 2) la numerosità di ciascun nuovo gruppo è di 5 individui. Queste due condizioni semplificano il processo, ma non sono fuori luogo in quanto sono coerenti con le dinamiche biosistemiche. Esse, infatti, prevedono una capacità portante finita dell'ecosistema e il conflitto nel procreare: chi è più fertile ha un vantaggio rispetto a chi lo è meno.

Assegniamo in ordine a ciascun individuo del gruppo un numero dall'1 al 5: (S, 1), (S, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5). Inseriamo, poi, cinque palline con questi numeri in una scatola. Si pesca ora a caso per $n = 5$ volte consecutive e con reinserimento un numero e si forma un nuovo gruppo di individui (figli) a partire da questo sottogruppo con il vincolo che il nuovo gruppo abbia la stessa numerosità del vecchio.

Ci chiediamo con quale probabilità, in un numero finito di passi, le cinque distinte si presenteranno nelle diverse generazioni e, quindi, con quale probabilità l'isolamento conservi una eventuale deriva genetica o faccia sì che appaia marcata.

La variabile aleatoria $x =$ "il numero di R nei nuovi gruppi" ha una distribuzione binomiale:

$$Pr(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{C}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{C}{N}\right)^{n-x} & \{x|x \in \mathbb{N}, N = 5, C = 3, n = 5\} \\ 0 & \text{altrove;} \end{cases} \quad (3)$$

dove N è la numerosità del gruppo, C è il numero di individui con modalità R e n è il numero dei nuovi figli.

Alla 1ª generazione, applicando la formula precedente, si possono ottenere i seguenti nuovi gruppi di figli con le rispettive probabilità (Tabella 2):

a)	SSSSS	0,01024
b)	SSSSR	0,07680
c)	SSSRR	0,23040
d)	SSRRR	0,34560
e)	SRRRR	0,25920
f)	RRRRR	0,07776
Totale:		1

I nuovi gruppi di individui, cioè le 6 cinque della Tabella 2, generati a caso dal gruppo SSRRR, distaccatosi dalla popolazione sempre per caso, dimostrano la conservazione della varia-

zione delle frequenze alleliche rispetto a quelle della popolazione di origine in una generazione. Questo è il vettore di stato iniziale di un processo stocastico markoviano [B.3].

Analizziamo ora le nuove possibili generazioni a partire dalle cinque della Tabella 2.

Il calcolo delle probabilità ci permette di determinare le probabilità associate alle 6 cinque possibili dopo k generazioni, a partire dalla prima.

In Tabella 3 sono riportate le probabilità di passare da ogni cinque della prima generazione a ogni cinque della seconda generazione ottenuta con (3). Il pedice associato a ogni cinque descrive la generazione di riferimento. La trasposta della matrice della Tabella 3 è la matrice di transizione T della catena di Markov che descrive le transizioni da un vettore di stato delle probabilità all'altro. Essa permette di determinare le probabilità associate a ogni cinque per ogni generazione, in un processo stocastico stazionario. Le probabilità delle possibili nuove cinque ottenibili alla seconda generazione a partire dalle possibili cinque della prima sono riportate in Tabella 4. Per determinare i valori in tabella 4, basta applicare il teorema delle probabilità composte per eventi statisticamente dipendenti. Per esempio, per calcolare la probabilità della sequenza di eventi $b_1 = SSSSR$ e $d_2 = SSRRR$ si fa:

$$Pr(b_1 \wedge d_2) = Pr(b_1) \cdot Pr(d_2|b_1) = 0,0768 \cdot 0,0512 = 0,00393216.$$

Ritornando alla matrice di transizione T , che è la trasposta della matrice in Tabella 3, essa è:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.32768 & 0.4096 & 0.2048 & 0.0512 & 0.0064 & 0.00032 \\ 0.07776 & 0.2592 & 0.3456 & 0.2304 & 0.0768 & 0.01024 \\ 0.01024 & 0.0768 & 0.2304 & 0.3456 & 0.2592 & 0.07776 \\ 0.00032 & 0.0064 & 0.0512 & 0.2048 & 0.4096 & 0.32768 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore di stato alla prima generazione è dato dalle probabilità della Tabella 1. Detto P_1 tale vettore riga esso è uguale a:

$$P_1 = (0.01024, 0.07680, 0.23040, 0.34560, 0.25920, 0.07776).$$

La relazione che permette il calcolo delle probabilità dei vari passaggi di stato è data da:

$$P_{k+1} = P_1 \cdot T^k. \quad (4)$$

con $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

Applicando la (4) per $k = 1$, si ottiene la settima colonna della tabella 4. Per $k = 2$ si ottiene il vettore di stato:

$$P_3 = (0.1651, 0.10184, 0.12498, 0.13422, 0.12377, 0.35010).$$

Per k sufficientemente grande si osserva che il vettore di stato tende alla seguente situazione limite:

$$P_{k \rightarrow +\infty} = (0.4, 0, 0, 0, 0, 0.6).$$

La situazione dimostra che a partire da un distacco {SSRRR} da una popolazione {SSSSSSRRR} si arriva dopo un numero di passi abbastanza grande a 2 stati possibili: o tutti i figli della k -esima generazione sono del tipo {SSSSS} con probabilità 0.4 o tutti i figli sono del tipo {RRRRR} con probabilità 0.6.

Al lettore volenteroso lasciamo il compito di completare il quadro generale della simulazione, considerando gli altri casi della tabella 1.

Ringraziamenti: l'autore ringrazia Elena Battaglia per le utili informazioni date circa la parte biologica dell'argomento e Alberto Burato per il controllo dei calcoli.

	SSSSS ₁	SSSSR ₁	SSSRR ₁	SSRRR ₁	SRRRR ₁	RRRRR ₁
SSSSS ₂	1	0,32768	0,07776	0,01024	0,00032	0
SSSSR ₂	0	0,4096	0,2592	0,0768	0,0064	0
SSSRR ₂	0	0,2048	0,3456	0,2304	0,0512	0
SSRRR ₂	0	0,0512	0,2304	0,3456	0,2048	0
SRRRR ₂	0	0,0064	0,0768	0,2592	0,4096	0
RRRRR ₂	0	0,00032	0,01024	0,07776	0,32768	1

\wedge	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	Pr(.,2)
a_2	0,01024	0,02517	0,01792	0,00354	0,00008	0	0,05694
b_2	0	0,03146	0,05972	0,02654	0,00166	0	0,11938
c_2	0	0,01573	0,07963	0,07963	0,01327	0	0,18825
d_2	0	0,00393	0,05308	0,11944	0,05308	0	0,22954
e_2	0	0,00049	0,01769	0,08958	0,10617	0	0,21393
f_2	0	0,00002	0,00236	0,02687	0,08493	0,07776	0,19195
							1

Riferimenti bibliografici: [B.1] Curtis Helena, *Biologia*, Ed. Zanichelli, Bologna, 1985. [B.2] Corso Luciano, 2009: *duecento anni dalla nascita di Darwin*, MatematicaMente n. 141, ISSN: 2037-63 67, Mathesis sezione di Verona. [B.3] Ross Sheldon, *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1996. I calcoli sono stati fatti con MATHEMATICA della Wolfram Research.