

Entropia come misura dell'eterogeneità [1]

di Luciano Corso [*]

[Segue dal numero 237]

Se si riceve l'informazione che «si è verificato uno dei 35 stati possibili», l'entropia associata ad essa, rispetto alla conoscenza esatta dello stato verificatosi, è data, invece, da:

$$H = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \sum_{i=1}^{35} p_i \cdot \text{Ln} \left(\frac{1}{p_i} \right) = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \left[\frac{1}{35} \cdot \text{Ln}(35) + \dots + \frac{1}{35} \cdot \text{Ln}(35) \right] = \frac{\text{Ln}(35)}{\text{Ln}(2)} \cong 5.12928.$$

Se in un dato territorio, che simuliamo essere una scacchiera 4×4 , sono presenti 16 unità di tossine relative a un dato inquinante, ed esse sono distribuite come nelle figure 1, 2, 3 come possiamo determinare questi diversi stati di inquinamento?

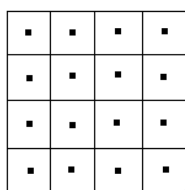


Fig. 1

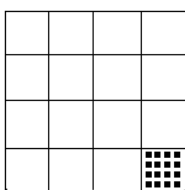


Fig. 2

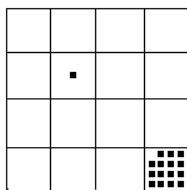


Fig. 3

Calcoliamo l'entropia associata a questi stati.

$$H_1 = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot \text{Ln}(16) + \dots + \frac{1}{16} \cdot \text{Ln}(16) \right] = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot \text{Ln}(16) \right] \cdot 16 = 4.$$

$$H_2 = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \left[\frac{16}{16} \cdot \text{Ln} \left(\frac{16}{16} \right) \right] = 0$$

$$H_3 = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot \text{Ln}(16) + \frac{15}{16} \cdot \text{Ln} \left(\frac{16}{15} \right) \right] \cong 0,33729.$$

Si può notare che lo stato con la massima dispersione di inquinanti ha un'entropia uguale a 4. Quindi, esso descrive lo stato di massima omogeneità tra le unità inquinanti (particelle) e le celle del territorio considerato. Se le unità inquinanti sono tutte concentrate in un'unica cella territoriale, l'entropia del sistema è uguale a zero. A mano a mano che le particelle inquinanti si muovono libere sul territorio si passa dal caso 2 al caso 1.

Generalizzazione

Consideriamo n unità inquinanti e k parcelle di territorio con $k < n$. Se il territorio è limitato, lo si può sempre ricoprire con un reticolo quadrato (si veda la Fig. 4).

Definita un'opportuna dimensione dei quadrati, selezioniamo poi solo quei quadrati che ricoprono strettamente il territorio. Nel nostro caso abbiamo una matrice 16×16 parcelle con 97 punti inquinanti. Identifichiamo ogni parcella con il simbolo A_{ij} in modo

tale che $A_{1,1}$ sia il primo quadrato in alto a sinistra (guardando il disegno) e $A_{16,16}$ il quadrato in basso a destra.

Allora, i quadrati che strettamente ricoprono il territorio sono, in seconda riga da $A_{2,8}$ a $A_{2,12}$, in terza riga da $A_{3,8}$ a $A_{3,12}$, nella riga 4 da $A_{4,8}$ a $A_{4,13}$, nella riga 5 da $A_{5,8}$ a $A_{5,14}$, nella riga 6 da $A_{6,8}$ a $A_{6,14}$, nella riga 7 da $A_{7,3}$ a $A_{7,14}$, con l'esclusione di $A_{7,7}$, nella riga 8 da $A_{8,2}$ a $A_{8,14}$, nella riga 9 da $A_{9,2}$ a $A_{9,14}$, nella riga 10 da $A_{10,2}$ a $A_{10,13}$, nella riga 11 da $A_{11,3}$ a $A_{11,13}$, nella riga 12 da $A_{12,5}$ a $A_{12,13}$, nella riga 13 da $A_{13,9}$ a $A_{13,12}$.

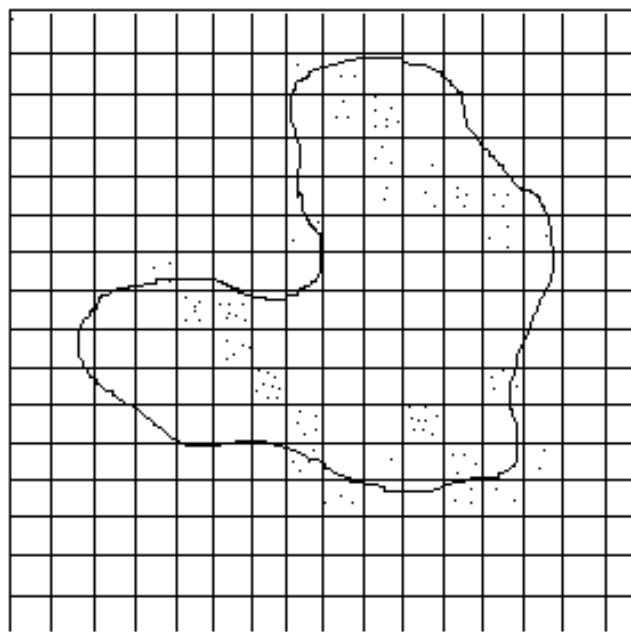


Fig. 4

Inoltre, supponiamo che ogni punto segnato in figura corrisponda a 2 unità inquinanti. Questa ipotesi è arbitraria e convenzionale; è pertanto possibile far corrispondere a ogni punto fissato nel diagramma un numero qualunque di unità inquinanti. Costruiamo, quindi, la tabella B dove è assegnato, per ogni parcella, il numero n_i di unità inquinanti trovate.

Tenuto conto che, in questo caso $k = 102$ e $n = 194$, applicando la (2) e la (3) si ottiene:

$$H = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \sum_{i=1}^{102} p_i \cdot \text{Ln} \frac{1}{p_i}$$

$$H = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \cdot \left(\frac{2}{194} \cdot \ln \frac{194}{2} + \dots + \frac{6}{194} \cdot \text{Ln} \frac{194}{6} \right)$$

$$H \cong 4.45172$$

$$\text{Max}(H) = \text{Log}_2 k = \text{Log}_2 102 \cong 6,67243$$

$$H' = \frac{H}{\text{Max}(H)} \cong \frac{4.45172}{\text{Log}_2 k} \cong 0,667181.$$

In sostanza, il concetto di entropia è utile anche per misurare il degrado ambientale causato dall'inquinamento e dai rifiuti.

Tabella B								
Parti	n_i	p_i	Parti	n_i	p_i	Parti	n_i	p_i
A2,8	2	2/194	A7,8	0	0	A10,3	0	0
A2,9	4	4/194	A7,9	0	0	A10,4	0	0
A2,10	0	0	A7,10	0	0	A10,5	0	0
A2,11	0	0	A7,11	0	0	A10,6	0	0
A2,12	0	0	A7,12	0	0	A10,7	18	18/194
A3,8	0	0	A7,13	0	0	A10,8	0	0
A3,9	6	6/194	A7,14	0	0	A10,9	0	0
A3,10	14	14/194	A8,2	0	0	A10,10	0	0
A3,11	0	0	A8,3	0	0	A10,11	0	0
A3,12	0	0	A8,4	0	0	A10,12	0	0
A4,8	0	0	A8,5	12	12/194	A10,13	8	8/194
A4,9	0	0	A8,6	14	14/194	A11,3	0	0
A4,10	6	6/194	A8,7	0	0	A11,4	0	0
A4,11	2	2/194	A8,8	0	0	A11,5	0	0
A4,12	0	0	A8,9	0	0	A11,6	0	0
A4,13	0	0	A8,10	0	0	A11,7	0	0
A5,8	0	0	A8,11	0	0	A11,8	10	10/194
A5,9	0	0	A8,12	0	0	A11,9	0	0
A5,10	4	4/194	A8,13	0	0	A11,10	0	0
A5,11	4	4/194	A8,14	0	0	A11,11	18	18/194
A5,12	8	8/194	A9,2	0	0	A11,12	0	0
A5,13	6	6/194	A9,3	0	0	A11,13	0	0
A5,14	0	0	A9,4	0	0	A12,5	0	0
A6,8	4	4/194	A9,5	0	0	A12,7	0	0
A6,9	0	0	A9,6	10	10/194	A12,8	8	8/194
A6,10	0	0	A9,7	0	0	A12,9	0	0
A6,11	0	0	A9,8	0	0	A12,10	2	2/194
A6,12	0	0	A9,9	0	0	A12,11	0	0
A6,13	6	6/194	A9,10	0	0	A12,12	8	8/194
A6,14	2	2/194	A9,11	0	0	A12,13	0	0
A7,3	0	0	A9,12	0	0	A13,9	6	6/194
A7,4	6	6/194	A9,13	0	0	A13,10	0	0
A7,5	0	0	A9,14	0	0	A13,11	0	0
A7,6	0	0	A10,2	0	0	A13,12	6	6/194

Riferimenti bibliografici: [B.1] Shannon Claude (1948), *A Mathematical Theory of Communication* (ISBN 0-25-272548-4), Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 372-423, 623-656, July-October. [B.2] Zani Sergio (1994), *Analisi dei dati statistici*, Milano, Giuffrè editore. [B.3] Atkins Peter W. (1988), *Il secondo principio*, Bologna, Zanichelli editore. [B.4] Pierce John R. (1963), *La teoria dell'informazione*, Milano, Mondadori editore, ed. EST. [B.5] Corso Luciano (1992), *Entropia come misura*, La voce verde n.11 Novembre-Dicembre, Verona. [B.6] Corso Luciano (1999), *Entropia media di una trasformazione*, MatematicaMente n. 16, aprile, Mathesis Verona. [B.7] Feynman Richard P. (2001), *La fisica di Feynman*, Vol. 1, pagg. 44.1 – 44.19 e 46.6 – 46.12, Bologna, Zanichelli editore.

[1] Il presente lavoro è già stato pubblicato dall'autore sul Periodico di Matematiche, ISSN-1582-8832, ed. Mathesis, n. 2 Mag-Ago 2011 Volume 3 Serie XI Anno CXXI, pagg. 97-106.

Ringrazio Alberto Burato per la revisione di questo lavoro.

[*] Presidente della sezione di Verona della Mathesis, fondatore e direttore della rivista MatematicaMente.– e-mail: lcorso@iol.it.

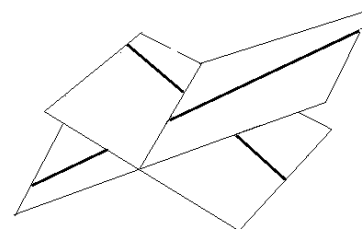


Figura 5. Linee sghembe su piani in intersezione immersi in \mathbb{R}^3 . (disegno di L. Corso).

La misura del mondo

di Azzurra D'Agostino
(Porretta Terme 1977)

In matematica non sono brava.
Perdo il conto delle foglie dei rami
e per le stelle ogni volta ricomincio da capo.
Non riesco a misurare il salto delle cavallette
e non so la formula per il perimetro delle nuvole.
Il calcolo di quanta neve sia caduta mi sfugge
e anche di quanta ne possa reggere un filo d'erba.
La somma dei passi per arrivare al mare non mi riesce
e mi chiedo se per il ritorno devo fare una sottrazione.
Ho diviso il numero dei semi per i frutti
il risultato è una nuova foresta e ne avanza qualcuno.
Se moltiplico le giornate di sole per quelle di pioggia
ottengo più di sette stagioni e non so quante settimane.
La matematica mi confonde. Come misura del mondo è strana.
Per quanti conti si facciano qualcosa non torna mai pari.
Due finestre fanno una vista? quattro muri sono una casa?
Noi siamo i nostri centimetri, chili, litri? quanto pesa un segreto?
quanto misura una risata? e l'area del cuore come si calcola?

Publicato il 3 dicembre 2013 su [«ipoetisonovivi.com»](http://ipoetisonovivi.com)

SCUOLA ESTIVA DI CASTELLAMMARE DI STABIA (NA)

Mathesis, sezioni di Napoli e di Castellammare di Stabia
Accademia Piceno Aprutina dei Velati di Teramo

Per docenti di Matematica - nei giorni 15, 16, 17, 18 luglio 2018

Contatti: ferdinando.casolaro@unina.it – tel. 347 1960693

salvatore.rao@unina.it – tel. 348 0581236

Segreteria APAV – email: apavsegreteria@gmail.com – tel. 340 3996505



Figura 6. Il professor Fulvio Arcangeli (1920-2017), docente di Matematica finanziaria presso l'Università degli Studi di Verona, qui all'età di 30 anni. La foto è del 1950 e fu scattata in Piazza delle Erbe, a Verona. Arcangeli fu il presidente e un attivista importante e convinto della Mathesis, sezione di Verona. Ne indirizzò la storia fino al 1993.