ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel. 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 239 – Pubblicato il 01 - 08 - 2018

PRELIMINARI PER I NUMERI p-ADICI

Antonino Giambò [*]

1. Giovanni e Giacomo sono due studenti universitari, amici da lunga data. Giovanni è al 2° anno di Matematica, Giacomo al 2° anno di Ingegneria. Passeggiano per il viale dell'Università e discutono piuttosto animatamente di strutture matematiche. Giacomo sostiene che non servono a nulla, come – dice lui con una certa sicumera – la maggior parte delle cose di cui si occupano i matematici. E, per riaffermare il suo concetto, si affida ad una storiella.
«Due amici, che navigano su un aerostato – racconta –, hanno perso l'orientamento e non sanno più dove si trovano. Fortunatamente scorgono su un isolotto un signore che sembra essere in meditazione. "Buon uomo – grida uno dei due – sa dirci dove ci troviamo? ". "Vi trovate su un aerostato" risponde quell'uomo, dopo lunga riflessione. "Ma guarda un po' – commenta stizzito quello che ha fatto la domanda – noi siamo in seria difficoltà e quel bell'imbusto ci porta pure per i fondelli". "No – interviene conciliante l'amico – non è come pensi tu. Quel signore ha risposto secondo il suo *habitus* mentale, che è quello di un matematico. Giurerei infatti che proprio di un matematico si tratti. Considera attentamente: egli ha riflettuto a lungo prima di rispondere; poi la sua risposta è oggettivamente corretta, siamo infatti su un aerostato, non lo si può negare; ma soprattutto quella risposta non serve a niente"». «Bene! Bravo! Bis! – commenta, polemico, Giovanni –. Buona barzelletta, ma pur sempre una barzelletta, caro amico, e le cose non stanno affatto come sostieni tu».
La discussione va avanti a lungo, ma ognuno dei due rimane sulle sue posizioni. Ad un certo punto, Giacomo raccoglie da terra un biglietto sul quale trova scritte alcune formule in sequenza. Sono qui riprodotte:

$$\begin{cases} f(x) \in \mathbb{Q}, \quad \forall\, x \in \mathbb{Q} \\ f(x)\colon \begin{cases} = 0 \;\; per\; x = 0 \\ > 0 \;\; per\; x \neq 0 \end{cases} \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{Q} \\ f(x + y) \leq f(x) + f(y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{Q}\,. \end{cases} \tag{1}$$

«Che roba è questa?» domanda Giacomo. «Ecco – interviene pronto Giovanni – queste sono esattamente le proprietà che definiscono una specifica struttura matematica». «Va bene – ancora Giacomo, che adesso sembra interessato – può essere, ma allora, come sostenevi poco fa, dovrebbe esserci almeno un modello di questa struttura». «Proprio così – afferma sicuro Giovanni – si tratta di trovarlo. Intanto possiamo dire che la struttura riguarda i numeri razionali». «Beh – s'intromette un po' sostenuto Giacomo – questo l'avevo capito da solo, non sono del tutto analfabeta. Anzi, adesso che rifletto bene, credo di poter dire di aver trovato un modello di quella struttura. Basta considerare la funzione $f(x)$, definita per ogni x razionale, tale che: $f(x) = 0$ per $x = 0$ ed $f(x) = 1$ per $x \neq 0$. Infatti: $f(x)$ è certamente un numero razionale; la seconda delle 4 condizioni è immediata; la terza e la quarta si spiegano agevolmente».
«Bravissimo! – commenta un meravigliato Giovanni – È proprio un modello della struttura. Anche se, per dirla con franchezza e senza offesa, si tratta di un modello piuttosto banale». «Banale quanto ti pare, ma pur sempre un modello – interviene Giacomo, alquanto piccato –. Prova a trovarne tu uno non banale, se ne sei capace». «Ci sto pensando da un po' – afferma Giovanni, meditabondo – e credo proprio di averne trovato uno meno banale del tuo. Si tratta di prendere la funzione $f(x)$, definita per ogni x razionale, tale che: $f(x)$ = valore assoluto di x, ossia $f(x) = |x|$ o anche $f(x)= \text{abs}(x)$.
Risulta infatti, per ogni x razionale:

$\text{abs}(x) \in \mathbb{Q}$; $\text{abs}(x) = 0$ per $x = 0$ e $\text{abs}(x) > 0$ per $x \neq 0$; $\text{abs}(x \cdot y) = \text{abs}(x) \cdot \text{abs}(y)$; $\text{abs}(x + y) \leq \text{abs}(x) + \text{abs}(y)$».

I due amici, che sembrano interessarsi sempre più alla questione, si domandano a questo punto se esistano altri modelli della struttura ma, nonostante i loro sforzi, non riescono a trovarne.

2. Alla loro animata discussione si aggiunge Aldo, un loro comune amico, che è prossimo alla laurea in Matematica. I due amici approfittano della sua presenza per chiedergli se ha qualche idea in merito alla questione. «O grulli – interloquisce uno sfottente Aldo – questa è la struttura che sta alla base della costruzione dei numeri *p-adici* sul corpo dei razionali!». «Numeri che?», interrogano all'unisono Giovanni e Giacomo. «Ho capito – risponde sprezzante Aldo – non avete mai sentito parlare di numeri *p-adici*. Ma siete proprio ignoranti! [*Pausa imbarazzante*]. Suvvia, sto scherzando. Effettivamente questi oggetti sono animali misteriosi per molti. Vi devo francamente confessare che io ne ho qualche idea perché la mia tesi di laurea verte esattamente su tali numeri e il foglietto che avete in mano è mio ed evidentemente mi è caduto da qualche parte». «Beh – interloquisce Giovanni – ti confesso che mi piacerebbe saperne di più». «Si può fare – promette Aldo –, almeno fino ad un certo punto, poiché non ho ancora completato lo studio dell'argomento. Comunque, ti informo su quello che so. Tutto è basato sul seguente teorema di aritmetica:
Presi un qualsiasi numero razionale x non nullo e un qualsiasi numero primo p, esiste uno ed un solo numero intero a tale che $x = p^a \cdot \frac{s}{t}$, dove s, t sono numeri interi non nulli e non divisibili per p.
Questo teorema si può dimostrare, ma mi limito a fornire qualche esempio, nel caso in cui per p sia stato scelto il valore 2, ma la procedura vale per ogni primo p. Attenzione! Ricordate che il numero 1 non si considera primo. Ebbene:

se $x = \dfrac{5}{2}$, allora $x = 2^{-1} \cdot \dfrac{5}{1}$; se $x = \dfrac{3}{7}$, allora $x = 2^{0} \cdot \dfrac{3}{7}$;

se $x = \dfrac{12}{5}$, allora $x = 2^{2} \cdot \dfrac{3}{5}$.

Orbene, se prendiamo la funzione $f(x)$, definita per ogni x razionale, tale che:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & per\;\; x = 0 \\ p^{-a} & per\;\; x \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

dove p è un numero primo ed a è il numero intero di cui sopra, questa funzione verifica tutte le proprietà della struttura in questione e quindi ne è un modello. In effetti:

- $f(x)$ è certamente un numero razionale e pertanto $f(x) \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

- Siccome p^{-a} è sicuramente un numero razionale positivo, la seconda proprietà è verificata.
- Molto più articolato è il ragionamento per la verifica delle ultime due proprietà.

Intanto osserviamo che se $x = 0$ o $y = 0$ allora $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ giacché entrambi i membri sono nulli, e inoltre $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Supponiamo allora che x, y siano due qualsiasi numeri razionali non nulli. Per il teorema precedente esistono due interi a, b tali che:

$$x = p^a \cdot \frac{s}{t}\ , \quad y = p^b \cdot \frac{u}{v}\ , \quad \text{e quindi:} \quad x \cdot y = p^{a+b} \cdot \frac{s\ \cdot u}{t \cdot\ v},$$

dove s, t, u, v sono numeri interi non nulli e non divisibili per p, per cui neppure $s \cdot u$ e $t \cdot v$ sono divisibili per p. Ne consegue che: $f(x \cdot y) = p^{-(a+b)} = p^{-a} \cdot p^{-b} = f(x) \cdot f(y)$.

E così è verificata la terza proprietà della struttura.

Ammettiamo adesso che sia $a \leq b$, per cui:

$$x + y = p^a \cdot \frac{s}{t} + p^b \cdot \frac{u}{v} = p^a \cdot \left(\frac{s}{t} + p^{b-a} \cdot \frac{u}{v}\right)$$
$$= p^a \cdot \frac{s \cdot v + t \cdot u \cdot p^{b-a}}{t \cdot v}.$$

Ora, nell'ultima frazione, il denominatore $t \cdot v$ è certamente un intero non nullo e non divisibile per p. Il numeratore, invece, che si spiega facilmente essere un numero intero non nullo, può essere divisibile per p e può non esserlo. Se non lo è, siccome numeratore e denominatore sono numeri interi non nulli e non divisibili per p, si conclude subito che: $f(x + y) = p^{-a}$. Siccome poi: $p^{-a} < p^{-a} + p^{-b}$, allora:

$f(x + y) < p^{-a} + p^{-b}$ e quindi: $f(x+y) < f(x) + f(y)$.

Se, al contrario, tale numeratore è divisibile per p, possiamo porre: $s \cdot v + t \cdot u \cdot p^{b-a} = p^c \cdot r$, essendo r un intero non nullo e non divisibile per p, mentre c è un intero positivo. Pertanto si ha:

$$x + y = p^a \cdot p^c \cdot \frac{r}{t \cdot v} = p^{a+c} \cdot \frac{r}{t \cdot v} \quad \text{e dunque:}$$

$f(x + y) = p^{-(a+c)} = p^{-a} \cdot p^{-c}$.

Ed essendo chiaramente $0 < p^{-c} < 1$, risulta $p^{-a} \cdot p^{-c} < p^{-a}$ e, a più forte ragione: $p^{-a} \cdot p^{-c} < p^{-a} + p^{-b}$. Di conseguenza:

$f(x + y) < p^{-a} + p^{-b}$ e quindi: $f(x + y) < f(x) + f(y)$.

E anche la quarta proprietà è così verificata.

È pertanto corretto concludere che la funzione $f(x)$, definita come sopra, è, per ogni numero primo p, un modello della struttura in questione. [*Segue al numero* 240]

[*] Già ispettore MIUR, Macerata, e-mail: giamboa906@gmail.com

NUMERI DIAGONALI E LATERALI

Un approccio con l'algebra lineare

Francesco Daddi [**]

Nell'articolo di S. Maracchia apparso sul numero 96 di questa rivista, si parla dei numeri diagonali (d_n) e laterali (l_n), definiti nel modo seguente:

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ l_0 = 0 \\ d_n = d_{n-1} + 2l_{n-1} \\ l_n = d_{n-1} + l_{n-1} \end{cases} ;$$

nel sopracitato articolo, viene posto il problema di trovare per essi delle formule chiuse, cioè formule che consentano il calcolo del valore n-simo delle due successioni senza calcolare i valori precedenti. Prendendo spunto dall'articolo [1], si vogliono qui ritrovare le due rispettive formule seguendo un approccio che fa leva sull'algebra lineare. Osserviamo per prima cosa che possiamo riscrivere le ultime due equazioni in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ l_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} d_{n-2} \\ l_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} d_0 \\ l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

dal momento che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

considerando la n-esima potenza si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n =$$
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Applicando la matrice al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, otteniamo una formula per i numeri diagonali e laterali:

$$\begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

dal momento che $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, risulta

$$\begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n \end{pmatrix}.$$

In definitiva abbiamo

$$\begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$$

ossia

$$d_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n$$

$$l_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n .$$

Bibliografia: [1] Daddi F., *Una formula chiusa per i numeri di Padovan*, Archimede, 4/2011, pp. 203-207.

[**] Liceo scientifico statale "F. Buonarroti" di Pisa,
email: francesco.daddi@istruzione.it