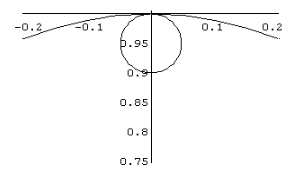
# MatematicaMente



Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 24 – dicembre 1999

Alcune considerazioni sulla congettura di Collatz

di Nicoletta Sala *, Danilo Merlini *, Massimo Sala *

Lothar Collatz, intorno al 1928, enunciò una congettura che chiamò "il problema del *3n+1*" che descrisse in diverse conferenze. Attualmente questo problema è anche noto come "algoritmo di Hasse", oppure problema di "Syracuse" di Ulam e di Kukutani.

Il problema del *3n+1* riguarda lo studio delle iterate (orbite) di un numero intero $n \geq 1$, nel processo iterativo generato dalla funzione $T: N^* \to N^*$ (dove N^* è l'insieme degli interi positivi) definita da: $T(n)$ è uguale a $n/2$ (se n è pari) oppure è uguale a $3n+1$ (se n è dispari).

Esempio: Se consideriamo $n=6$ come numero di partenza, si genera la sequenza numerica: *6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1*. Questo problema asserisce che ogni intero n ha un'orbita finita di lunghezza $l=l(n)$ e che questa termina nel ciclo di ordine *3*, contenente l'unità e dato da (4, 2, 1, 4, 2, 1, ...). Dato un numero n prende il nome di *lunghezza del ciclo di n*, o *lunghezza delle orbite* oppure *lunghezza delle traiettorie*, l'ammontare dei numeri generati dall'algoritmo del *3n+1* (escluso il numero di partenza). Ad esempio, la lunghezza del ciclo del numero *6* è *8*. Ci siamo occupati di questo problema cercando di determinare un modello statistico che permettesse di rappresentarlo con buona approssimazione. Il nostro studio è stato suddiviso nei seguenti punti: 1) la crescita del calice (una nostra rappresentazione inerente la crescita dei numeri in questo processo iterativo); 2) la determinazione di una costante irrazionale che governa la crescita dei numeri in questo processo (che abbiamo chiamato costante di Collatz) [4]; 3) l'attrattore di Fibonacci (abbiamo ricavato una sequenza stocastica (attrattore) di tipo Fibonacci che governa la crescita della popolazione dei numeri nei vari livelli); 4) le orbite lunghe (un approccio che ci ha permesso di verificare, in modo asintotico, le nostre congetture senza coinvolgere numeri molto grandi e quindi strumenti di elaborazione più potenti). Per queste nostre ricerche, abbiamo utilizzato un computer IBM compatibile con algoritmi elaborati in C++ per il calcolo delle orbite inverse e l'uso di un foglio elettronico per le interpolazioni necessarie.

Conclusioni: Dal punto di vista computazionale, questa congettura è stata verificata per numeri dell'ordine di $n_0 \approx 2 \; 10^{12}$ ed un modo efficiente di calcolo delle orbite è apparso con l'uso del S/W di computer algebra Maple V [2]. Finora è stato dimostrato che tutti i numeri fino a 2^{40} cadono in questo ciclo attrattore, non è noto però cosa accade per numeri più grandi. Diversi scienziati si sono applicati allo studio del problema del *3n+1* seguendo diversi approcci che vanno dalla matematica tradizionale all'uso dei computer per la dimostrazione [1] [3]. Questa congettura è ancora aperta e, per questo motivo, interessa molti studiosi che, risolvendola, eviterebbero l'oblio.

Bibliografia: [1] Belaga E. G., Mignotte M., 1998 - Embedding the 3x+1 Conjecture in a 3x+d Context - In: Experimental Mathematics, Vol. 7, n. 2, pp. 145 – 151. [2] Beltraminelli S., Merlini D., Rusconi L., 1995 - Orbite inverse nel problema del 3n+1 - In: Note di Matematica e Fisica, Atti del Colloquio, anno 7, Ed. Cerfim Locarno, vol.7, Locarno, Switzerland, pp. 325 - 352. [3] Lagarias J. C., Weiss A., 1992 - The 3x+1 Problem: Two Stochastic Models - In: Annals of Applied Probability, 2, pp. 229 – 261. [4] Merlini D., Sala M., Sala N., 1996 - Il problema del 3n+1 e la costante di Collatz - In: Atti del convegno nazionale Mathesis: Cento anni di matematica, Fratelli Palombi Editore, Roma, pp. 331 – 336.

** Mathesis sezione di Verbania e CERFIM (Centro di Ricerche in Fisica e Matematica) di Locarno (Svizzera)*

Sulla definizione di potenza di un numero

di Luigi Landra **

Nei trattati di matematica spesso non si rispetta il principio di economia, cioè quel principio secondo il quale il numero delle convenzioni - o postulati - deve essere il minore possibile. Prendiamo in considerazione, ad esempio, il caso della potenza di un numero. La sua tradizionale definizione, ove sia a appartenente all'insieme dei razionali **Q** (allarghiamo le considerazioni a questo insieme anche se ai matematici interessa particolarmente soltanto la base formata dal sottoinsieme $\mathbf{Q}^+$) e sia n appartenente all'insieme degli interi relativi **Z**, è l'operazione che rispetta le seguenti convenzioni: (1) $a^n=a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n volte); (2) $a^1=a$; (3) $a^0=1$ con $a \neq 0$; (4) $a^{-n} = 1/a^n$ con $a \neq 0$.

Su molti libri viene detto che la seconda convenzione non si può ottenere dalla prima. E perché mai? Se $n=1$, con la convenzione (1) non sussiste nessun prodotto, poiché n è preso una sola volta: ciò che rimane è proprio a, cioè il risultato dell'operazione. La convenzione (2) si può pertanto, considerare conseguenza diretta della convenzione (1). La convenzione (4) non è altro che la conseguenza del teorema del rapporto di potenze di ugual base, la cui dimostrazione poggia sulla definizione di quoziente di potenze e sulla proprietà associativa del prodotto, quando la differenza tra l'esponente del dividendo e quello del divisore risulta un numero negativo. I fattori del denominatore della frazione risultano in numero maggiore rispetto a quelli del numeratore. Per questo motivo l'esponente risulta negativo. La convenzione (3) si può anch'essa agevolmente ricavare dal teorema del rapporto di potenze di ugual base. Il particolare rapporto $a^n/a^n=a^{n-n}$ è la divisione tra due numeri uguali e perciò uguale all'unità, cioè $a^0=1$. In conclusione, la definizione di potenza si può ridurre alla convenzione (1). Inoltre, sempre su molti libri di testo, si afferma che la potenza 0^0 è priva di significato. Utilizzando il teorema del rapporto di potenze di ugual base si ha il caso particolare $0^n/0^n=0^{n-n}=0^0$. Poiché $0^n= 0$ e, senza applicare il teorema del rapporto di potenze ma eseguendo direttamente il calcolo delle due potenze, otteniamo da $0^n/0^n$ come risultato $0/0$ che, in algebra, sappiamo essere uguale a qualsiasi numero, come si può dedurre dalla tavola della moltiplicazione, e perciò una espressione indeterminata. Non è dunque vero che 0^0 è privo di significato.

*** Presidente della sezione Mathesis di Seregno (MI)*

Il caso e la vita sulla Terra

di Luigi Marigo

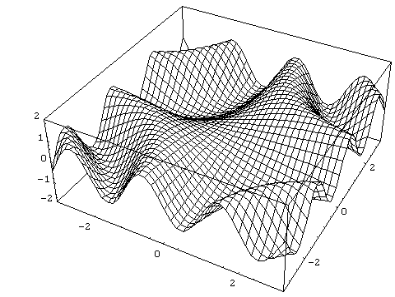
Raccolgo l'invito di Luciano Corso (su Matematicamente n. 20) e lo faccio appoggiandomi a citazioni notevoli. Innanzi tutto è bene ricordare che la questione non è neutra: si va immediatamente a confronto con convinzioni metafisiche e religiose, e per questo cito Stephen Jay Gould (1) "[…] Uno scienziato è prima di tutto un uomo e non può prescindere dalle proprie convinzioni. È assurdo che ci si possa mantenere totalmente neutrale e imparziale di fronte a qualsiasi argomento. È molto meglio conoscere le proprie preferenze, dichiarandole apertamente e poi trattare i dati e l'argomento della ricerca in modo oggettivo e onesto, piuttosto che ignorare ostinatamente le proprie convinzioni e magari farsi guidare dai pregiudizi senza rendersene conto."

Dirò che il quesito posto da L. C. è di forte attualità e ad esso si danno risposte assai diverse tra loro, intese ad assegnare valori stimati alla probabilità che il caso abbia portato alla vita intelligente, così come la conosciamo; rinuncio a citazioni favorevoli all'evento (2), (3) non per pregiudizio contrario ma perché questa è l'opinione prevalente, ampiamente diffusa tra scienziati e pubblicizzata da riviste e quotidiani. Cito due opinioni diverse: Fred Hoyle, di cui riassumo un passo (4), stima che la probabilità che si siano formati per caso i circa 2000 enzimi necessari alla vita sia di uno contro uno seguito da circa 40.000 zeri. L. Sertorio (5) sostiene che "[…] Occorrono condizioni dinamiche fortunate per far sì che il pianeta diventi un ecosistema "simile" alla Terra. Il fatto che un altro ecosistema comprensibile all'uomo, ossia simile alla Terra, esista nell'Universo appare come un evento estremamente improbabile, viene persino il sospetto che l'ecosistema Terra sia unico".

Sull'argomento esistono opinioni radicali, tendenti addirittura a sottrarre la questione al dominio del calcolo delle probabilità: riporto un passo di Claude Allègre (6) circa l'opinione prevalente che l'Universo sia abitato:" È così che la pensano alcuni. Richiamandosi al calcolo delle probabilità, possono dimostrare senza troppi problemi che la vita esiste altrove e che senza dubbio altri esseri intelligenti simili a noi popolano l'Universo. Se la nascita dell'Universo è così banale e le stesse cause producono gli stessi risultati perché non dovrebbe essere proprio così? Eppure non c'è niente che ci autorizzi a sviluppare un tale ragionamento. Nel significato fisico dei numeri ci sono molte discontinuità fondamentali sulle quali forse i matematici non insistono abbastanza. Si tratta di discontinuità situate fra zero e uno, fra uno e due. Uno corrisponde all'esistenza dell'avvenimento; zero alla sua negazione. Poiché si tratta di discontinuità ben nota non mi ci soffermerò oltre. Ma la differenza tra uno e due è altrettanto importante. Uno è l'unicità, l'originalità; due è la ripetizione, la duplicazione. Il linguaggio non si sbaglia quando fa cominciare il plurale con due. Se un giorno si osserveranno un'altra Terra, un'altra forma di vita, un altro tipo di esseri intelligenti, altrove nell'Universo, allora saranno autorizzati tutti i possibili calcoli di probabilità e io sarò pronto a crederci. Ma fino a quel momento li considererò fuori tema, extrascientifici". Piero Pasolini (7) è ancora più drastico, proponendo una distinzione tra "caso statistico" quando si tratta di probabilità accertabili, e di "caso assoluto" quando si tratta di estrema indeterminazione; ovviamente, per lui, esistenza dell'Universo e della Vita rientrano nel "caso assoluto".

Presento ora la mia opinione: per dare una risposta al quesito così come posto da L. C., è necessario sapere se vi è un unico Universo o se vi sono (come ipotizzato da alcuni) infiniti Universi paralleli: se così fosse la probabilità di eventi favorevoli alla vita potrebbe essere elevata, ma l'ipotesi è così labile che mi sembra possa dirsi tutto e il contrario di tutto. Su un piano più realistico, e forse di più facile verifica, è la questione se l'unico Universo che conosciamo si espanderà per sempre, morendo di morte termica, o se fra qualche decina di miliardi di anni comincerà a contrarsi e ripercorrerà la sua storia a ritroso (Big Crunch), dopodiché si avrà un nuovo Big Bang e tutto si ripeterà infinite volte: anche in un Universo ciclico le probabilità favorevoli alla vita possono aumentare per accumulo temporale ma sappiamo che per ora l'Universo è in espansione; il resto è ipotesi. Ora, se ci riferiamo all'unico Universo che conosciamo e all'unica sua storia, ritengo che la questione sia comunque difficile da inquadrare nel calcolo delle probabilità: di analisi frequentistica non se ne parla, giacché conosciamo un solo evento; di analisi in termini assiomatici nemmeno perché non abbiamo criteri (se non tautologici) per assegnare delle probabilità; c'è solo la vaga ipotesi di una spontanea aggregazione da cui si sarebbe messa in moto una evoluzione auto organizzativa che poi avrebbe portato alla vita intelligente. Gli esperimenti di S. Miller e di A. Urey del 1953 confermavano che, in condizioni di laboratorio simulanti quelle della Terra primordiale, si formavano alcuni amminoacidi e basi azotate: si accesero vive speranze, ma nessun passo verso una maggior complessità ne seguì, almeno fino ad oggi. È ancora vero che i recenti studi sul caos deterministico e sulla complessità prevedono e descrivono fenomeni di auto organizzazione, ma anche qui il divario di complessità tra le possibili simulazioni al computer e la complessità della vita è talmente smisurato che solo la fantasia di qualcuno (8) può colmarlo. E allora? Dobbiamo appellarci a un Dio Creatore? Ma i credenti, come me, non stanno meglio degli scientisti probabilisti, perché in nessun modo si vede come, dove, quando un Creatore sia intervenuto: se ha pilotato direttamente i fenomeni microscopici si è preso cura di celarlo dietro l'indeterminazione quantistica; se ha creato direttamente i viventi, l'ha celato dietro una apparentemente inconfutabile evoluzione. Il mondo ci sembra dominato dalla contingenza: c'erano le premesse perché qualcosa potesse accadere; poteva accadere, poteva non accadere, è accaduto, e per quello che sappiamo, una volta sola.

Bibliografia: [1] Stephen Jay Gould, "Esistiamo per caso", intervista a "Newton", n. 10 ottobre 1999; [2] Edward Ashpole, "Seti – La ricerca di vita intelligente nell'Universo", CDE, Milano, 1990; [3] Frank Drake, "La vita oltre la Terra", intervista a "Newton", n. 11 novembre 1999; [4] Fred Hoyle, "L'Universo intelligente", A. Mondadori editore, Milano, 1994; [5] L. Sertorio, "Che cosa ci vuole per fare un ecosistema?", Giornale di Fisica, volume 33, 1992; [6] Claude Allegre, "Storia della Terra", Marsilio editori, 1994; [7] Piero Pasolini, "Le grandi idee che hanno rivoluzionato la Scienza nell'ultimo secolo", Città Nuova, 1976; [8] Peter W. Atkins, "Il secondo principio", Zanichelli editore, Bologna, 1988



Z=sen(x·y) ; dominio:{x,y∈ ***R****: $-2\pi\le x\le 2\pi$;$-2\pi\le y\le 2\pi$}*

L'insieme ***R*** non è numerabile

Teorema di G. Cantor: L'insieme dei numeri reali non è numerabile.

Dimostrazione: Consideriamo l'intervallo [0,1). Consideriamo ora in tale intervallo tutti i numeri costruiti in linguaggio binario mediante sequenze infinite di 0 e 1; poniamo ora in successione numerabile questi numeri:

$$E_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \dots$$
$$E_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$E_n = 0,\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Notiamo che $\forall$ i,j a_{ij} assume valori o 0 o 1. Consideriamo ora l'insieme $\Phi=\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$. Questo insieme è numerabile, ma non è l'insieme dei numeri reali (nel senso che non li comprende tutti). Per dimostrare che non li comprende tutti basta verificare che si può costruire almeno un numero reale che non è numerato nella sequenza E_i $\forall$i. Per tale ragione costruiamo il seguente numero: $E = 0,\ b_1\ b_2\ b_3 \dots b_n \dots$ dove: $\{[a_{nn}=0] \Rightarrow [b_n=1]\}$ e $\{[a_{nn}=1] \Rightarrow [b_n=0]\}$, $\forall$n. Questo numero E, per come è stato costruito, risulta essere $E \neq E_1$, $E \neq E_2$, …, $E \neq E_n$, … Possiamo quindi dire che $E \notin \Phi$. Si conclude quindi che non esiste un insieme numerabile equipotente a **R**. Come è noto, la portata di questo teorema è risultata determinante per gli sviluppi dell'analisi matematica e della teoria degli insiemi. Pochi però conoscono le considerevoli implicazioni filosofiche originate da questo risultato. Il problema della non numerabilità di **R**, è riportato in una lettera che Cantor scrisse a Dedekind il 12 dicembre 1873. *(di L. Corso)*

Bibliografia: Lucio Lombardo Radice, L'Infinito, Editori Riuniti, 1981. Roma

2000, anno di fine millennio

La redazione di ***Matematicamente*** augura a tutti i suoi lettori un felice anno nuovo.