ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel. 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 240 – Pubblicato il 03 - 09 - 2018

PRELIMINARI PER I NUMERI p-ADICI

Antonino Giambò [*]

[*Segue dal n.* 239]

Ognuno di questi modelli è denominato anche *valutazione p-adica* della struttura. Tali modelli sono basilari per la costruzione del sistema dei ***numeri p-adici*** sul corpo dei razionali. E qui mi fermo, poiché il discorso diventa complicato».

3. Giacomo commenta polemicamente: «Bello. Interessante. Un bell'esercizio di virtuosismo algebrico. Ma a che servono questi numeri *p-adici*, che secondo te si costruiscono sulla base del modello che hai testé descritto?»

«Mi risulta – risponde, paziente, Aldo – che tali numeri trovino applicazione nella risoluzione delle equazioni diofantee e di molti problemi di teoria dei numeri, nonché nella dimostrazione di alcuni risultati della teoria delle forme quadratiche, anche se personalmente non sono in grado di spiegare come ciò avvenga poiché, come dicevo, ci sto ancora studiando.

Per la cronaca – precisa Aldo –, questi numeri sono stati introdotti e studiati per la prima volta nel 1897 dal matematico tedesco Kurt Hensel (1861-1941), allievo di Leopold Kronecker (1823-1891). Egli li inventò, letteralmente, dopo essersi reso conto che gli erano utili per studiare lo sviluppo delle funzioni algebriche in serie di potenze. Detto ciò – ammonisce Aldo, rivolgendosi in particolare a Giacomo – credo francamente che sia sbagliato chiedersi oggi a cosa serva questo o quello, e non solo in matematica ma in qualsiasi campo, anche manuale, poiché non lo puoi sapere. Oggi non puoi sapere se e quando ti tornerà utile ciò che hai imparato, qualunque cosa sia. Come dice il saggio, "impara l'arte e mettila da parte". In futuro, un giorno, forse potresti applicare quanto hai appreso a situazioni di cui oggi non hai la benché minima percezione. Ma lo puoi fare soltanto se conosci ciò che ti può far comodo. Se non lo conosci non puoi applicare alcunché».

4. Accantonando il finto dialogo fra i tre amici, ci proponiamo di descrivere un procedimento idoneo alla costruzione dei numeri p-adici, dicendo subito che si tratta di un procedimento che ricalca il noto metodo di Cantor di costruzione dei numeri reali come classi di equivalenza di successioni di Cauchy. Metodo che alcuni chiamano di Meray-Cantor.

Il procedimento di estensione dei numeri razionali ai numeri reali è basato, com'è noto, sul concetto di *distanza euclidea*, cioè sulla distanza $d(x, y) = |x - y|$, dove $x, y \in \mathbb{Q}$. Esso può essere ripetuto, basandolo però, non sulla distanza euclidea, bensì sulla cosiddetta "distanza *p-adica*", al fine di costruire l'insieme dei numeri *p-adici*.

Incominciamo allora a definire la "distanza *p-adica*" e, a tal proposito, poniamo l'attenzione sulla funzione $f(x)$, definita per ogni x razionale, in base alla formula (2). Chiaramente, per ogni $x\in\mathbb{Q}$, f(x) è un numero razionale non negativo. Questo numero è denominato ***valore assoluto p-adico*** (o ***norma p-adica***) di x ed è indicato con la scrittura $|x|_p$. Il numero intero a si chiama, a sua volta, *valutazione p-adica* di x.

Si capisce che esiste una norma *p-adica* per ogni numero primo p e, pertanto, esistono infinite norme *p-adiche* di uno stesso numero, non necessariamente diverse fra loro. Per esempio, considerato il numero $x=\frac{84}{125}$, che si può mettere nella forma $x = 2^2\cdot 3^1\cdot 5^{-3}\cdot 7^1$, si ha:

$|x|_2=2^{-2}=\frac{1}{4}$; $|x|_3=3^{-1}=\frac{1}{3}$; $|x|_5=5^3=125$;

$|x|_7=7^{-1}=\frac{1}{7}$; : $|x|_p=p^0=1$ per ogni altro primo p.

In generale, in virtù del teorema fondamentale dell'aritmetica, preso un qualsiasi numero razionale x, diverso da 0 e da 1, esiste un numero finito n di numeri primi distinti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e altrettanti numeri interi non nulli $a_1, a_2, \ldots a_n$ tali che:

$$|x| = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}\ .$$

Risulta pertanto che:

$$|x|_{p_k} = {p_k}^{-a_k} \text{ per } 1 \le k \le n, \text{ mentre } |x|_p = p^0 = 1$$

per ogni altro primo p.

Ebbene, considerati *due* qualsiasi numeri razionali x, y, si definisce ***distanza p-adica*** tra x e y il numero razionale non negativo, indicato con $d_p(x, y)$, tale che: $d_p(x, y)=|x-y|_p$. Anche adesso, come per la norma *p-adica*, esistono infinite distanze *p-adiche* fra x ed y.

Per esempio, presi i numeri

$\overline{x}=\frac{5}{6}$ e $\overline{y}=\frac{12}{5}$, risulta: $d_p(\overline{x}, \overline{y})=\left|\frac{5}{6}-\frac{12}{5}\right|_p=\left|\frac{47}{30}\right|_p$.

Ora, siccome $\frac{47}{30}=2^{-1}\cdot 3^{-1}\cdot 5^{-1}\cdot 47^1$, si ha:

$d_2(\overline{x}, \overline{y}) = 2^1=2$, $d_3(\overline{x}, \overline{y}) = 3^1 = 3$, $d_5(\overline{x}, \overline{y}) = 5^1 = 5$,

$d_{47}(\overline{x}, \overline{y}) = 47^{-1} = \frac{1}{47}$, $d_p(\overline{x}, \overline{y}) = p^0 = 1$,

per ogni altro p.

La distanza *p-adica* tra due numeri razionali x, y soddisfa le seguenti proprietà, $\forall x, y\in\mathbb{Q}$:

$d_p(x, y)=0$ se e solo se $x = y$; $d_p(x, y) > 0$ in ogni altro caso;
$d_p(x, y)=d_p(y, x)$; $d_p(x, y) \le d_p(x, z) + d_p(z, y)$ con $z\in\mathbb{Q}$.

Questo, com'è noto, significa che la coppia $(\mathbb{Q},\, d_p)$ è uno *spazio metrico*.

5. A questo punto abbiamo tutti gli elementi per descrivere il procedimento che porta ad un'estensione dei numeri razionali basata sulla distanza *p-adica*, una volta che sia stato fissato per p un determinato valore. Il procedimento ripercorre, come anticipato, il cammino fatto per passare dai razionali ai reali col metodo delle successioni di Cauchy.

Definizione 5.1. Una successione (a_n) di numeri razionali si dice *convergente* (in norma *p-adica*) ad un numero razionale λ se, preso un qualsiasi numero razionale positivo ε, esiste subordinatamente un indice n_ε tale che, per ogni indice $n > n_\varepsilon$ risulti $d_p(\lambda, a_n) < \varepsilon$.

Definizione 5.2. Una successione (a_n) di numeri razionali si dice *successione di Cauchy* (in norma *p-adica*) se, per ogni razionale positivo ε, esiste in subordine un indice n_ε tale che, comunque si prendano gli indici n, m, con $n \ge m > n_\varepsilon$, risulti $d_p(a_n, a_m) < \varepsilon$, ovvero $|a_n - a_m|_p < \varepsilon$.

Teorema 5.1. Ogni successione di numeri razionali convergente (in norma *p-adica*) ad un numero razionale è una successione di Cauchy (in norma *p-adica*).

La dimostrazione di questo teorema è piuttosto elementare, ma la presentiamo ugualmente. Sia (a_n) una successione di numeri razionali convergente al razionale λ. In base alla def. 5.1, preso un qualsiasi numero razionale positivo $\varepsilon/2$, esiste in subordine un indice n_ε tale che, per ogni indice $n > n_\varepsilon$ e per ogni indice $m > n_\varepsilon$ risulta: $d_p(\lambda, a_n) < \varepsilon/2$ e $d_p(\lambda, a_m) < \varepsilon/2$. Pertanto:

$$d_p(a_n, a_m) \leq d_p(\lambda, a_n) + d_p(\lambda, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Si dimostra che esistono successioni (di numeri razionali) di Cauchy che convergono (in norma *p-adica*) ad un limite che però è un numero non razionale e successioni che non sono convergenti.

Si prende ora in esame l'insieme $\mathrm{P}(\mathbb{Q})$ delle successioni (di numeri razionali) di Cauchy che convergono (in norma *p-adica*) a qualche limite, razionale o no. In questo insieme si introduce la relazione $\mathscr{R}$ tale che – prese in esso due successioni qualsiasi (a_n) e (b_n) – risulti $(a_n)\mathscr{R}(\mathrm{b_n})$ se, per ogni razionale positivo ε, $\exists n_\varepsilon : d_p(a_n\,, b_n) < \varepsilon\,, \forall n > n_\varepsilon$.

Si dimostra che questa relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva, ed è perciò una relazione di equivalenza. Ragion per cui due qualsiasi successioni di $\mathrm{P}(\mathbb{Q})$, tra le quali sussista la relazione $\mathscr{R}$, si dicono *equivalenti*. In pratica, due successioni equivalenti sono tali per cui la loro differenza converge a zero. Il che è come dire che due successioni equivalenti, comunque scelte in $\mathrm{P}(\mathbb{Q})$, convergono allo stesso limite λ, che può essere razionale o non razionale.

Tutto questo permette di ripartire l'insieme $\mathrm{P}(\mathbb{Q})$ in classi di equivalenza, mettendo in ogni classe tutte le successioni che convergono allo stesso limite. Ognuna di tali classi di equivalenza è un nuovo ente, che si denomina ***numero p-adico***, e può essere rappresentato da una qualunque successione della classe senza però identificarsi con essa.

L'insieme quoziente $\mathrm{P}(\mathbb{Q})/\mathscr{R}$ è pertanto l'insieme dei numeri *p-adici*: si indica con $\mathbb{Q}_\mathbf{p}$. In questo insieme si possono introdurre le due operazioni "addizione" (+) e "moltiplicazione" (·) e dimostrare che la struttura algebrica $(\mathbb{Q}_\mathbf{p}\,, +,\ \cdot)$ è un *campo*, il *campo dei numeri p-adici*. Come il campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +,\ \cdot)$ è un'espansione del campo dei razionali $(\mathbb{Q}, +,\ \cdot)$, anche il campo dei numeri *p-adici* lo è. Ma mentre il primo è un completamento del campo dei razionali rispetto alla distanza euclidea, il secondo lo è rispetto alla distanza *p-adica*. E questo implica almeno una differenza, che andiamo subito ad evidenziare.

6. Dati due numeri *p-adici* qualsiasi, con $|a|_p < |b|_p$, non esiste alcun numero intero positivo *n* tale che $|n{\cdot}a|_p > |b|_p$.

In effetti, tenendo presente una delle proprietà della struttura [1], risulta: $|n{\cdot}a|_p = |n|_p{\cdot}|a|_p$. D'altro canto, siccome *n* è un intero positivo, come caso particolare della proprietà fondamentale dell'aritmetica, esiste, per ogni numero primo *p*, uno ed un solo numero intero $\nu \geq 0$ tale che $n = p^\nu{\cdot}k$, dove *k* è un intero positivo non divisibile per *p*. Di conseguenza: $|n|_p = p^{-\nu}$, $|n|_p \leq 1$, $|n{\cdot}a|_p \leq |a|_p$ e, a più forte ragione, essendo $|a|_p{<}|b|_p$, $|n{\cdot}a|_p < |b|_p$.

Questa conclusione consente di affermare che *il campo dei numeri p-adici è un campo non archimedeo*, a differenza del campo dei numeri reali, che invece è archimedeo. Quindi, l'espansione dei razionali ai numeri *p-adici* è cosa diversa dall'espansione dei razionali ai reali, benché anche i numeri *p-adici* siano numeri reali.

7. Al fine di formarci un'idea più chiara dei numeri *p-adici*, osserviamo che ogni numero *p-adico* può essere rappresentato come una serie del tipo:

$$\sum_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i = \cdots + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + a_{-2} p^{-2} + a_{-3} p^{-3} + \cdots + a_{-k} p^{-k}$$

dove *k* è un numero naturale, mentre i coefficienti a_i sono cifre del sistema di numerazione posizionale in base *p* e perciò sono numeri interi compresi fra 0 e *p* –1, estremi inclusi.

Questo significa che il numero *p-adico* può essere scritto, in notazione posizionale, come *sequenza unilaterale sinistra*:

$$[\dots a_3 a_2 a_1 a_0\,, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-k}]_p\,.$$

Tale scrittura presenta un numero finito di cifre dopo la virgola (numero che può essere anche uguale a 0), mentre ha un numero infinito di cifre prima della virgola, che da un certo punto in poi, verso sinistra, possono essere degli 0.

Pensierino finale: *Una verità matematica non è semplice né complessa: semplicemente è.*

(Émile Lemoine, matematico francese, 1840-1912)

Riferimenti bibliografici: [B.1] A. Chiellini – R. Giannarelli, *L'esame orale di matematica*, Roma, Libreria Eredi Virgilio Veschi, 1962. [B.2] Z. Krigowska, *Cenni di didattica della matematica*, Bologna, Quaderni UMI, Pitagora Editrice, 1979.

Riferimenti sitografici: [S1] *Geometria 2, a.a. 2016/2017, Il completamento p-adico di* $\mathbb{Q}$, disponibile in http://math.i-learn.unito.it/pluginfile.php/72816/mod_resource/content/0/completamento_p-adico.pdf (ultimo accesso il 22-08-2018) [S2] *Una introducción a los números p-ádicos*, http://funes.uniandes.edu.co/5615/1/CarrilloUnaintroduccionGeometr%C3%ADa2008.PDF (ultimo accesso il 22-08-2018)

[*] Già ispettore MIUR, Macerata, e-mail: giamboa906@gmail.com

---

CONVEGNO NAZIONALE DI ANALISI NON STANDARD

VIII Giornata Nazionale di Studio

Firenze 6 ottobre 2018

In Ricordo di Abraham Robinson Iniziatore dell'Analisi non Standard nel Centenario della Sua Nascita

Programma: 9.00-9.15 Saluti di benvenuto ● 9.15-10.10 Carlo Toffalori (UNICAM) **Ricordando Abraham Robinson** ● 10.10-11.00 Vieri Benci (UNIPI) **Numeri Euclidei** ● 11.00-11.20 Coffee break ● 11.20-12.10 Richard O'Donovan (College André Chavanne Geneve) **Delta functions: When Internal Nonstandard Function Can Do Better Than Distributions** ● 12.10-13.00 Ruggero Ferro (UNIVR) **Da Eudosso a Berkeley: quando il pregiudizio ha impedito di considerare anche quantità trascurabili** ● 13.00-14.00 Lunch break ● 14.00-14.45 Bruno Stecca e Leonardo Aldegheri (Docenti in Licei di Verona) **Aspetti non standard del calcolo integrale nell'opera di Maria Gaetana Agnesi** ● 14.45-15.15 A. Pivi, E. Bellandi, A. Secreti, G. Tosi (ITT "Fedi-Fermi" di Pistoia) **Percorso non standard per Istituto Tecnico** ● 15.15-15.45 Paolo Bonavoglia (Liceo Classico M. Foscarini di Venezia) **Analisi alla maniera non standard o alla maniera Cauchy Weierstrass: un confronto** ● 15.45-16.05 Coffee break ● 16.05-16.35 Piero Cacciatore (Liceo Classico Tito Livio di Padova) **Un percorso d'inserimento dell'Analisi non standard nel curriculum liceale** ● 16.35-17.05 Roberto Zanasi (ITIS E. Fermi di Modena) **Gli orologi di Fourier** ● 17.05-17.35 Daniele Zambelli (Liceo Scientifico G. Fracastoro di Verona) **L'introduzione dei numeri iperreali in una classe terza** ● 17.35-18.05 Paola Magnaghi e Tullia Norando (Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano) **Maria Gaetana Agnesi: nuovi metodi di insegnamento nel passato** ● 18.05-18.30 Trasferimento in centro ● 18.30-20.00 Giuseppe Conti (UNIFI) **Monumenti fiorentini: Bellezza e geometria**.

CONTATTI: Mathesis Firenze - www.mathesis.unifi.it – Dipartimento di Matematica "U. Dini" - Viale Morgagni 67/A - 50134 FIRENZE
tel. 055 2751464 – mathesis@math.unifi.it – Iscrizioni entro il 27 settembre 2018.