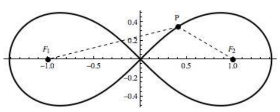
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Lemniscata di Bernoulli



Luogo dei punti del piano tali che

$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = 1$

Equazione cartesiana $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel. 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 242 – Pubblicato il 02 - 11 - 2018

Induzione, probabilità, corroborazione

Carlo Veronesi [*]

1. Induzione

Secondo un'opinione corrente la conoscenza scientifica si basa sul metodo induttivo, che ricava leggi generali a partire da osservazioni ripetute di certi caratteri dei fenomeni naturali. Le argomentazioni induttive hanno di norma una forma come questa: se gli oggetti di una certa classe caratterizzata dalla proprietà P hanno anche la proprietà Q, allora qualsiasi altro oggetto che goda di P avrà anch'esso la proprietà Q. Per esempio: se osservo n cigni, con n abbastanza alto, e questi sono bianchi senza eccezioni, sono autorizzato a pensare che anche il cigno $(n+1)$-esimo sarà bianco o addirittura che tutti i cigni siano bianchi.

Questo tipo di argomentazione, che parte da più casi particolari e giunge a una conclusione generale andando oltre i casi esaminati, presenta molte difficoltà. Già nel Settecento il filosofo scozzese **David Hume** (1711–1776) aveva criticato questo modo di procedere argomentativo. Hume riteneva che l'induzione come procedimento per ricavare leggi generali sia un metodo irrazionale, basato solo sulla forza dell'abitudine. Perché una legge scientifica generale possa fondarsi sull'induzione - spiegò Hume - bisogna supporre che ci sia un principio di uniformità della natura e che il futuro sarà uguale al passato, assunzioni per niente scontate.

Karl Popper (1902-1994), che è stato il più grande filosofo della scienza del Novecento, si uniformò a questo punto di vista antinduttivo. Secondo Popper l'induzione non serve in nessuna fase del procedimento scientifico: non serve per scoprire una legge generale e nemmeno per confermarla. Le leggi scientifiche non nascono da osservazioni ripetute, ma da idee che si fanno strada nella mente dello scienziato, da ipotesi e intuizioni sulla natura delle cose che vanno oltre la mera osservabilità. Inoltre, una volta che una legge sia stata formulata, l'induzione non ne garantisce la validità: per quanti cigni bianchi si osservino non potrò mai essere certo che l'asserzione "tutti i cigni sono bianchi" sia universalmente vera. In effetti - argomenta Popper - l'asserzione "tutti i cigni sono bianchi" è logicamente equivalente a "non esiste un cigno scuro". Mentre l'esistenza può essere provata, l'inesistenza non può esserlo: non posso setacciare tutto l'universo spazio-temporale per essere certo che un cigno scuro non esiste, non è mai esistito e non esisterà mai. Dunque - conclude Popper - nessuna legge universale può essere confermata dalle osservazioni, per quanto queste siano numerose; può essere solo confutata dagli esempi contrari.

Anche **Albert Einstein** (1879-1955) in un articolo del 1919 (che Popper potrebbe aver letto) aveva osservato - citiamo testualmente - che "i progressi veramente grandi della conoscenza della natura si sono avuti da una via quasi diametralmente opposta a quella dell'induzione". Se il ricercatore - spiega Einstein - non si avvicinasse alla natura con già qualche idea anticipatrice, non potrebbe mai cogliere nella quantità dei dati di una complicatissima esperienza, quei fatti che possono essere raccolti in una legge. Galileo non avrebbe mai scoperto la legge di caduta dei gravi, senza aver in mente l'idea che i risultati che misuriamo di fatto sono complicati dalla resistenza dell'aria e che quindi dobbiamo considerare cadute di gravi in cui tale resistenza gioca un ruolo sostanzialmente nullo. Il ricercatore parte sempre dai fatti, ma egli non perviene al suo sistema teorico per via metodica, induttiva; egli piuttosto si avvicina tramite una scelta intuitiva tra teorie pensabili. E poi Einstein così continua: "Una teoria può essere riconosciuta come sbagliata, quando c'è un errore logico nelle sue deduzioni, o come inadeguata, quando un fatto non si accorda con una delle sue conseguenze. Ma non si può mai dimostrare la verità di una teoria. Perché non si può sapere che anche nel futuro non si avrà una esperienza che contraddica le sue conseguenze; e perché sono sempre pensabili altri sistemi teorici in grado di connettere i medesimi fatti".

2. Probabilità

I sostenitori del carattere induttivo della scienza, anche acconsentendo sul fatto che gli esempi a favore non possano stabilire con certezza la verità di una asserzione universale, argomentano tuttavia che la probabilità di questa legge - in assenza di esempi contrari - cresca col numero degli esempi positivi. Fra i sostenitori di questa linea di pensiero citiamo **Bertrand Russell** (1872-1970), di cui vogliamo ricordare il famoso apologo del *tacchino induttivista*. Russell ricorda che l'uso di associare cose o eventi per abitudine non è limitato agli uomini ma è molto comune anche fra gli animali: "Gli animali domestici si aspettano di ricevere il cibo quando vedono la persona che di solito gliene porge. Sappiamo che questa fiducia piuttosto sprovveduta nell'uniformità può indurre in errore. L'uomo da cui il pollo ha ricevuto il cibo per ogni giorno della sua vita gli tirerà alla fine il collo, dimostrando che un'idea meno primitiva dell'uniformità della natura sarebbe stata utile all'animale". E Russell così prosegue: è vero che il compito della scienza è di scoprire leggi di uniformità, come le leggi del moto e la legge di gravità, alle quali, secondo la nostra esperienza, non ci sono eccezioni, ma tutto quello che possiamo sperare di ottenere è la probabilità: "Per esempio, un uomo che avesse visto moltissimi cigni bianchi potrebbe concludere, secondo il nostro principio, che in base ai dati è *probabile* che tutti i cigni siano bianchi e la conclusione sarebbe perfettamente valida. Non è infirmata neppure dal fatto che alcuni cigni siano neri, perché una cosa può benissimo accadere a dispetto del fatto che alcuni dati la rendano improbabile".

Di solito si dice che i sostenitori di questa corrente probabilista di pensiero aderiscono alla cosiddetta *concezione bayesiana della scienza*, con riferimento all'opera del reverendo **Thomas Bayes** (1702-1761), il cui contributo per la metodologia scientifica dovrebbe avere un maggiore riconoscimento.

Cerchiamo di riassumere sinteticamente: se abbiamo una legge H e un resoconto osservativo E, si pensa che la probabilità di H sia influenzata da E secondo la formula

$$p(H|E) = \frac{p(H \ \& \ E)}{p(E)}$$

ovvero, ricordando, nella sua versione più semplice, la formula di Bayes,

$$p(H|E) = \frac{p(H) \cdot p(E|H)}{p(E)}$$

dove $p(H)$ indica la *probabilità iniziale* o *a priori* della legge H, cioè il grado di fiducia che si può attribuire ad H se non si possiede alcuna informazione empirica;

$p(E)$ indica la probabilità (o la prevedibilità) dell'evento E;

$p(E/H)$ indica la *verosimiglianza* di E rispetto ad H, cioè il grado di credenza che si può attribuire ad E sapendo che vale H (può essere interpretata come il potere esplicativo o predittivo di H nei confronti di E); $P(H/E)$ rappresenta la *probabilità finale* o *a posteriori* dell'ipotesi H, aggiornata dall'informazione dell'evento E.
Si nota che la probabilità finale aumenta al decrescere della probabilità (o prevedibilità) dell'evento E e al crescere della verosimiglianza $p(E/H)$.
Se in particolare E deriva logicamente da H, risulta $p(E|H)$ =1 e la formula diventa $p(H|E) = p(H)/p(E)$. Se $p(H) > 0$ e $0 < p(E) < 1$, sarà $p(H/E) > \mathrm{p(H)}$: dunque, al di fuori dei valori estremi, l'evento E conferma l'ipotesi H e il *grado di conferma* sarà dato dalla differenza $p(H/E) - p(H)$.

Ora, secondo Popper, tutto questo discorso non vale: non si può parlare di conferma bayesiana perché la probabilità di una legge universale, in un universo *infinito*, vale sempre e comunque 0: infatti le prove favorevoli non possono essere altro che in numero finito, mentre le prove possibili, della legge e delle sue conseguenze, sono potenzialmente infinite.

Seguiamo più in dettaglio l'argomentazione di Popper. Supponiamo che H significhi "tutti i cigni sono bianchi" e di considerare n osservazioni (n cigni). Supponendo che per ogni cigno sia equiprobabile l'essere bianco oppure no e che le osservazioni siano tutte indipendenti, per un numero n finito di cigni risulta $p(H) = 2^{-n}$ e dunque per un numero infinito di cigni

$$p(H) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-n} = 0.$$

La probabilità iniziale $p(H)$ di una legge universale H vale sempre 0 e, se valgono le formule precedenti, nessuna evidenza sperimentale E la può incrementare. Così nessuna teoria potrà essere confermata attraverso l'osservazione e la teoria bayesiana della conferma non raggiunge il suo scopo.

3. Corroborazione

Riassumiamo il discorso di Popper. Tutti gli enunciati scientifici universali vertono su domini infiniti di oggetti. Ora la probabilità iniziale di una ipotesi H, che verte su un dominio infinito, è uguale a 0; ma se $p(H) = 0$, allora, per la formula di Bayes, anche la probabilità finale sarà $p(H|E) = 0$ per ogni evidenza osservativa E. Per uscire dall'impasse Popper propone che non si parli di conferma bayesiana o probabilistica ma di *corroborazione*, come stima della accettabilità di una teoria. L'idea di Popper è che, ai fini della corroborazione, non servano le verifiche banali (come la ripetizione di uno stesso esperimento). Occorrono controlli severi, cioè il successo in previsioni improbabili, ad alto rischio di confutazione (ma abbiamo visto che anche la concezione bayesiana teneva conto dell'improbabiltà di E). La funzione di corroborazione pensata da Popper è a tre posti: accanto alla teoria H e alla evidenza E, Popper introduce una conoscenza di sfondo B (*background information*), che sarebbe tutta quella conoscenza che accettiamo, magari provvisoriamente, nel controllo della teoria H. Per la corroborazione occorrono fatti inattesi, che siano improbabili rispetto alla sola conoscenza di sfondo B e che non ci aspetteremmo in assenza della teoria H. La deviazione dei raggi luminosi, provenienti da due stelle lontane, quando passano vicino al Sole (deviazione osservata durante la famosa eclisse del 1919, che confermò la teoria della relatività generale) è una osservazione corroborante perché sarebbe stata impensabile senza la teoria della gravitazione di Einstein, che prevedeva che la luce dovesse essere attratta dal Sole proprio come i corpi pesanti.
Popper definisce la funzione di corroborazione [2, pag. 255] nel modo seguente

$$C(H,E,B) = \frac{p(E/HB) - p(E/B)}{p(E/HB) - p(EH/B) + p(E/B)}.$$

Da questa formula (in cui Popper omette il simbolo "&" di congiunzione logica) vediamo che la corroborazione, benché definita per mezzo di probabilità, non è essa stessa una probabilità, potendo assumere anche valori negativi. Infatti:

- se E falsifica H, cioè E è incompatibile con la legge H in presenza di B, risulta $p(E/HB) = p(EH/B) = 0$ e dunque $C = -1$;
- se E è indipendente da H (il che avviene quando E è una tautologia o è una conseguenza logica di B) abbiamo $p(E/HB) = p(E/B)$ cioè $C = 0$;
- se E è una conseguenza logica di H in presenza di B, cioè $p(E/HB) = 1$, il numeratore vale $1 - p(E/B)$ ed eguaglia l'improbabilità di E in presenza di B. Se E è un evento molto improbabile rispetto alla conoscenza di sfondo B allora il grado di corroborazione fornito da E alla legge H cresce e tende al valore massimo $C = 1$ quando $p(E/B)$ e $p(EH/B)$ tendono a 0.

Osservazioni finali

A buon senso si può aggiungere che tutte queste probabilità sembrano difficili da stimare, nella funzione di corroborazione e anche nel discorso bayesiano. Popper stesso aveva espresso dubbi sul fatto che la funzione C sia numericamente calcolabile, salvo casi speciali.
Inoltre, qualche commentatore osserva che la funzione di corroborazione nasce da una critica alla concezione bayesiana che sembra essere eccessiva. L'obiezione di Popper si basa su una interpretazione degli enunciati universali a cui viene attribuita una *probabilità iniziale nulla* pensando che vertano su *classi* o *domini infiniti*; ma questa assunzione potrebbe essere troppo forte. Non è scontato che la nozione matematica di *infinito* possa essere usata al di fuori della matematica e applicata a totalità empiriche. A questo proposito viene ricordato che, secondo un modello cosmologico attualmente accettato, l'intero universo, a causa della curvatura indotta dalle masse, sarebbe un sistema che si chiude su sé stesso, cioè illimitato senza essere infinito. Dunque non ci sarebbe ragione di pensare che le leggi scientifiche universali vertano su totalità infinite. Un enunciato generale come "tutti i cigni sono bianchi" si può riferire ai cigni che sono esistiti, che esistono e che esisteranno in ogni regione dello spazio, senza per questo dover supporre che queste classi di cigni siano infinite. Queste totalità empiriche non sono completamente ispezionabili, nel senso che il numero dei loro elementi è sempre maggiore di quelli effettivamente osservati e osservabili (come risulta evidente dalla impossibilità di ritornare nel passato) ma sono comunque totalità finite. Perciò il procedimento di Popper, di passaggio al limite per $n \to \infty$ azzerando la probabilità iniziale, sembra una forzatura ingiustificata.

C'è un'altra critica che si può fare alla teoria popperiana della corroborazione, perché ad un certo punto Popper afferma (negli scritti della maturità) che le teorie corroborate dal superamento dei tentativi di confutazione possono candidarsi ad essere, se non teorie vere, almeno buone approssimazioni della realtà: sarebbe poco ragionevole - argomenta Popper – pensare che la fisica di Einstein, che aveva avuto successo in previsioni rischiose, con misurazioni precise di fenomeni non previsti dalle precedenti teorie, non contenesse un po' di verità e che non fosse più vicina alla verità di tutte le teorie rivali che l'avevano preceduta. [*Segue al numero* 243]

[*] Cultore di Logica e Filosofia della Scienza, Dipartimento di Scienze Umane - Università degli Studi di Verona