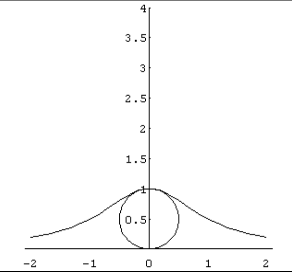
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 26 – febbraio 2000



Positività dell'hessiano nel caso della retta dei minimi quadrati

di Gianpaolo Zontini *

[1ª parte] Nell'**interpolazione statistica** il criterio di accostamento più usato per ottenere la curva interpolante **fra** i punti dati $P_i(x_i,y_i)$ è quello denominato **metodo dei minimi quadrati**.

Se la curva interpolante scelta è una **retta** $y=m\cdot x+q$, detta retta di regressione, il metodo citato consiste nella determinazione dei coefficienti m e q in modo da minimizzare una certa funzione nelle due variabili m e q. Questa funzione viene definita come la somma dei quadrati delle differenze (errori) tra i valori delle ordinate dei punti sulla retta, calcolate con i valori noti x_i e le ordinate y_i dei punti dati:

$$S(m,q)=\sum_{i=1}^{n}\left(mx_i+q-y_i\right)^2 . \qquad (1)$$

Applicando la teoria dell'ottimizzazione per le funzioni in più variabili, allo scopo di determinare i punti estremali della funzione $S(m,q)$ si pone uguale a zero il gradiente della $S(m,q)$, ossia si risolve il sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial m}=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial q}=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Questo sistema, dopo aver calcolato le derivate parziali indicate, con semplici passaggi algebrici assume la seguente forma normale:

$$\begin{cases}m\cdot\sum x_i^2+q\cdot\sum x_i=\sum x_i y_i\\ m\cdot\sum x_i+q\cdot n=\sum y_i.\end{cases} \qquad (3)$$

dove, per semplicità, si è posto

$\sum$ in luogo di $\sum_{i=1}^{n}$.

Dimostreremo che Il determinante del sistema $\Delta=n\cdot\sum x_i^2-(\sum x_i)^2$ risulta diverso da zero, tranne il caso, privo di interesse, in cui le ascisse degli n punti coincidano; per ottenere questo proveremo che Δ è positivo, potendosi anche scrivere

$$\Delta=\sum_{i<j}\left(x_i-x_j\right)^2 .$$

Si tratta, quindi, di mostrare che le due espressioni per Δ sono uguali, ossia che

$$n\cdot\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2=\sum_{i<j}\left(x_i-x_j\right)^2 \qquad (4)$$

A tale scopo si può applicare *il principio d'induzione matematica*: 1°) Per n=2, che è il valore minimo per n, la relazione da dimostrare è: $2\cdot(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2$ che si verifica subito sviluppando e semplificando il membro di sinistra. 2°) Vedremo ora come, supponendo vera la formula (4) per n, segue anche la validità per n+1; si deve perciò provare che

$$(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2=\sum_{i<j}^{n+1}\left(x_i-x_j\right)^2 . \qquad (5)$$

Il membro di sinistra della (5) si può scrivere come

$$(n+1)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2+x_{n+1}^2\right]-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+x_{n+1}\right)^2 \qquad (6)$$

Applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione, dalla (6) si ottiene

$$n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\cdot x_{n+1}^2+x_{n+1}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+$$
$$-2\cdot x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i-x_{n+1}^2=\sum_{i<j}^{n+1}\left(x_i-x_j\right)^2 ,$$

da cui, semplificando ed osservando che primo e quinto termine del primo membro dell'uguaglianza equivalgono, per ipotesi induttiva, all'espressione

$$\sum_{i<j}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2 ,$$

e modificando, inoltre, l'espressione a sinistra, si ottiene:

$$\sum_{i<j}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\cdot x_{n+1}^2-2\cdot x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i=$$
$$=\sum_{i<j}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{n+1}\right)^2 .$$

Togliendo i termini comuni nei due membri della ultima uguaglianza e sviluppando i quadrati dei binomi a destra dell'uguale, si ricava:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+nx_{n+1}^2-2\cdot x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i=$$
$$=\left(x_1-x_{n+1}\right)^2+\left(x_2-x_{n+1}\right)^2+\dots+\left(x_n-x_{n+1}\right)^2=$$
$$=x_1^2-2\cdot x_1x_{n+1}+x_{n+1}^2+x_2^2-2\cdot x_2x_{n+1}+x_{n+1}^2+$$
$$+\cdots+x_n^2-2\cdot x_nx_{n+1}+x_{n+1}^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+nx_{n+1}^2-2\cdot x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

e quest'ultima identità garantisce la validità della formula (4), completando la dimostrazione per induzione. *(segue al n. 27)*

* *Docente presso l'ITIS G. Marconi di Rovereto (TN)*

Sulla non numerabilità di R

Il professor Giangiacomo Gerla di Salerno, riguardo alla breve nota su "L'insieme R non è numerabile" – MatematicaMente n.24 – osserva che "[…] ad essere pignoli [...] la nota contiene un errore. Infatti credo si debba supporre che i numeri dell'intervallo [0,1] non debbano mai essere rappresentati con il periodo 1. Solo in tale caso ad espansioni diverse corrispondono numeri diversi. Ad esempio se E_1 fosse il numero 0,011111... allora dal fatto che la prima cifra di E sia 1 non segue che E sia diverso da E_1, potendo essere E=0,1000... […]"

Ringrazio G. Gerla per la sua nota critica che spinge ad una maggior precisione nell'affrontare l'argomento.

In effetti, nella nota di cui si parla si sono identificati, come spesso si fa impropriamente, i numeri di [0,1] con le loro scritture (o espansioni, cioè successioni numerabili di cifre binarie dopo 0,). Distinguendo tra le due nozioni, ci si accorge che quanto dimostrato nella nota citata è la non numerabilità delle scritture, e non dei numeri reali di [0,1]. Dal momento che più scritture possono indicare lo stesso numero nell'intervallo [0,1], segue che il fatto dimostrato - che un elenco numerabile di scritture non può esaurire tutte le scritture - non esclude che una scrittura esclusa indichi un numero indicato già da una scrittura presente nell'elenco (come esemplifica Gerla), così i reali di [0,1] potrebbero essere ancora in numero numerabile. Per una dimostrazione della non numerabilità dei reali di [0,1], e non solo delle loro scritture, occorre studiare quali numeri ammettono più scritture, ovvero quali scritture diverse indicano lo stesso numero. Se due scritture diverse indicano lo stesso numero di [0,1], la loro differenza dovrà essere 0, e ciò succede solo per le scritture che sono uguali fino all'n-esima cifra, e poi una ha l'(n+1)-esima cifra 1 e tutte le successive 0, mentre l'altra ha l'(n+1)-esima cifra 0 e poi tutte le successive 1. Così i numeri reali di [0,1] sono tanti quanti le scritture escluse quelle che da un certo punto in poi sono 1. Di fatto, queste particolari scritture (che sarebbero doppioni nell'indicare un numero) sono in numero numerabile, così le altre (che sono in corrispondenza biiettiva con i reali di [0,1]) devono essere più che numerabili. In effetti, se queste ultime fossero solo numerabili, l'insieme delle scritture sarebbe l'unione di due insiemi numerabili, e dunque numerabile, contro quanto dimostrato nella precedente nota in proposito. Finalmente si può concludere che i numeri reali dell'intervallo [0,1] costituiscono un insieme più che numerabile. Ora, vista la relativa esiguità di scritture diverse che indicano uno stesso numero, ci si rende conto che il passaggio centrale della dimostrazione della non numerabilità di R sta in quanto esposto nella nota precedente sull'argomento, che d'altra parte riporta l'idea fondamentale ed innovativa introdotta da Cantor che va sotto il nome di metodo diagonale di dimostrazione. (di *Luciano Corso*)

Qual è il più grande: a^b o b^a ?

di Franco Nuzzi **

Siano a e b due numeri positivi, non necessariamente interi, con a > b. Qual è il più grande fra a^b e b^a ? Partiamo da qualche esempio numerico: 1) se a=3 e b=2 allora $a^b > b^a$; 2) se a=4 e b=2 allora $a^b = b^a$; 3) se a=5 e b=2 allora $a^b < b^a$. Per avviare la nostra analisi concentriamoci sull'equazione $a^b = b^a$. Prendendo i logaritmi naturali di ambo i membri si ha: b log a = a log b (1) . Sia ora k >1 tale che a = kb (2). Sostituendo la (2) nella (1) si ricavano le seguenti equazioni parametriche:

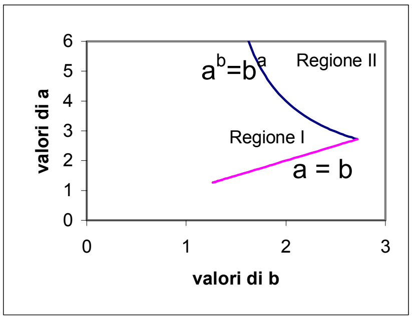
$$a = k^{\frac{k}{k-1}} \quad ; b = k^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{con } k > 1. \qquad (3)$$

Può essere utile ora fare la sostituzione n = 1/(k-1) con la quale le (3) diventano:

$$a = (1 + 1/n)^{n+1} \; ; \; b = (1 + 1/n)^n \qquad (4)$$

Infatti ora è possibile ricavare che cosa succede se $k \to 1$ per il quale risulta a = b. Se $k \to 1$ si ha che $n \to \infty$ e quindi il limite delle (4) fornisce: a = e ; b =e.

In figura è riportato il grafico della curva $a^b = b^a$ e della retta a=b. Essi delimitano tre regioni: nella regione I risulta che $a^b > b^a$; nella regione II invece sarà $a^b < b^a$. La regione III posta al disotto della retta a=b non va considerata perché ivi risulta a<b contro l'ipotesi di partenza. Inoltre nel punto A(e;e) è semplice verificare analiticamente che la curva $a^b=b^a$ risulta perpendicolare alla retta a=b. Infatti la pendenza della curva in A è *da*/*d*b = -1.



*** Docente presso il Liceo Q. O. Flacco di Bari*

Sulla definizione di potenza di un numero

In merito all'articolo dell'amico Luigi Landra sulla potenza di un numero – MatematicaMente n. 24, pag. 1, 2ª colonna – osservo che egli non ha considerato che le definizioni sono cose serie e non devono lasciar adito a dubbi né possono essere stiracchiate a piacer nostro; esse dicono solo quel che dicono e se si definisce la potenza ennesima di un numero *a* come il prodotto di *a n* volte per se stesso, vuol dire che si deve prendere *n>1* per cui la proprietà del rapporto tra due potenze di ugual base vale solo se il primo esponente è maggiore del secondo($a^n/a^m=a^{n-m}$ solo se *n>m*). Ogni altro caso va definito a parte e non si tratta di una inutile pignoleria; a^n/a^n è uguale a *1* ma niente autorizza a scrivere $a^0=1$, a meno che non lo si stabilisca per estendere la proprietà detta; così anche per a^1 che è uguale ad *a* solo se lo si definisce tale, dato che non è compreso nella definizione. (*di Silvio Maracchia* ***)

*** Docente di Storia della Matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma

La Tesi di Church-Turing e la Tesi di Cook-Karp

di Sauro Tulipani ****

La nozione di algoritmo è molto antica, basta pensare per esempio al metodo delle divisioni successive formulato da Euclide per il calcolo del massimo comune divisore. Il concetto di algoritmo però è stato posto in discussione solo negli anni '30 del secolo scorso da alcuni logici matematici (Gödel, Herbrand, Turing, Church, Kleene) i quali, seguendo il sogno di Hilbert, hanno cercato di determinare delle condizioni per generare in modo automatico con una procedura meccanica le dimostrazioni matematiche.

La formalizzazione più soddisfacente di algoritmo è stata trovata da *Alan Turing* che nel 1936 con le famose macchine che prendono il suo nome ha fornito un solido fondamento alla teoria della calcolabilità. In questa ottica *Alonzo Church* ha formulato la sua famosa tesi, chiamata anche *Tesi di Church-Turing,* secondo la quale i problemi risolvibili per via algoritmica sono tutti e soli i problemi risolvibili da *Macchine di Turing*.

Successivamente, dopo che il concetto di calcolabile era ben assodato, le Macchine di Turing sono risultate anche un valido strumento per fondare la Teoria della Complessità che prende in considerazione le risorse per la esecuzione di algoritmi e analizza il costo necessario per la risoluzione di problemi. Infatti, con lo sviluppo del calcolo dovuto al progresso dei calcolatori, ci si è resi conto come certi problemi risolvibili da algoritmi che consumano una quantità di tempo esponenziale in funzione della dimensione dei dati di ingresso non sono adoperabili in pratica.

La seguente tabella mette a confronto l'efficiente metodo di Gauss-Jordan ed il metodo di Cramer (con la regola di Laplace per i determinanti) per risolvere un sistema lineare compatibile n×n. Il primo fa circa (2/3)n^3 operazioni elementari mentre il secondo fa un numero esponenziale di operazioni (dell'ordine di *n*!).

	Metodo di Cramer	Metodo di Gauss
12	103 minuti	$7{,}1 \cdot 10^{-4}$ secondi
20	$1{,}6 \cdot 10^{6}$ anni	$3{,}1 \cdot 10^{-3}$ secondi
50	$4{,}9 \cdot 10^{52}$ anni	$4{,}4 \cdot 10^{-2}$ secondi

Si è assunto che la velocità del computer sia un milione di operazioni elementari al secondo.

Per convincerci meglio, assumiamo che un certo problema venga risolto da un algoritmo che, su dati in ingresso di dimensione *n*, esegua un numero di passi *f(n)*. Quindi il tempo di calcolo sarà *T(n)=cf(n)* con *c* costante indipendente da *n* ed inversamente proporzionale alla velocità della macchina. Ora, prendiamo un computer 100 volte più veloce e paragoniamo la dimensione *X*, che il nuovo computer è in grado di elaborare con la dimensione *L* che elabora il vecchio computer nella medesima unità di tempo. Avremo l'uguaglianza $cf(L)=(c/100)\cdot f(X)$ che interpretata per due diversi algoritmi uno con un numero di passi polinomiale f(n)= n^2 e l'altro con f(n)= 10^n, conduce, rispettivamente, a $X=10L$ e $X=L+\log_{10}100=L+2$
Nel caso polinomiale la dimensione viene moltiplicata per un fattore, mentre nel caso esponenziale viene aggiunto un fattore che in percentuale dà un guadagno trascurabile.

I motivi discussi ed altri motivi hanno condotto *S. Cook* e *R. Karp* a formulare nel 1972 la famosa *Tesi* che identifica i problemi "trattabili" con i problemi risolubili da un algoritmo *polinomiale* mentre considera "praticamente non risolubili" i problemi per cui si conoscono solo algoritmi *esponenziali*.

**** Docente ordinario presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Perugia.

***Comunicato**. Il nuovo Consiglio Nazionale della MATHESIS è costituito dai seguenti membri: Emilio Ambrisi, Carmelo Campagna (tesoriere), Luciano Corso (vicepresidente), Salvatore Ciurleo, Bruno D'Amore, Franco Eugeni (Presidente), Gianfranco Gambarelli, Andrea Laforgia, Carmelo Mammana, Antonio Maturo (segretario), Aldo Morelli. Ai neo eletti: auguri!*