MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 27 – marzo 2000

Positività dell'hessiano nel caso della retta dei minimi quadrati

di Gianpaolo Zontini *

[*2ª parte, segue dal n. 26*] Il fatto che $\Delta \neq 0$ assicura che il sistema (3) ammette un'unica soluzione data da

$$m^* = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$q^* = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i y_i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}. \qquad (7)$$

Ora, per stabilire la natura dell'unico punto estremale trovato *(m*,q*)*, si deve analizzare il segno della $\partial^2 S/\partial m^2$ e del determinante hessiano *H(m,q)*, valutati con i valori di *m** e *q** che sono soluzione del sistema visto sopra. Si ha

$$\frac{\partial^2 S(m,q)}{\partial m^2} = 2\sum x^2{}_i > 0 \text{ e } H(m,q) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial m^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial m \partial q} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial q \partial m} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial q^2} \end{vmatrix}$$

con $\partial^2 S/\partial q \cdot \partial m = \partial^2 S/\partial m \cdot \partial q$ dato che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Schwarz. Calcolando le derivate seconde di *S(m,q)* e sviluppando il determinante, *H(m,q)* assume la forma:

$$H(m,q) = 4 \cdot n \cdot \sum x_i^2 - \left(2 \cdot \sum x_i\right)^2 = 4 \cdot \left[n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] = 4\Delta > 0 \qquad (8)$$

Risultando $\partial^2 S(m,q)/\partial m^2$ e *H(m,q)* positivi in tutti i punti *(m,q)*, risulteranno positivi, in particolare, anche per *(m*,q*)* e allora *(m*,q*)* è punto di minimo relativo proprio per la funzione *S(m, q)* e, vista la definizione di *S(m,q)*, anche punto di minimo assoluto.

** Docente presso l'ITIS G. Marconi di Rovereto (TN)*

Il ruolo dello spazio e del tempo nell'evoluzione delle teorie unificate

(2ª parte: dal dopo Einstein alla superstringa)

di Paolo Di Sia**

[Segue dal n. 25] ***Kaluza, Klein e la quinta dimensione***: Nel 1919 Theodor Franz Eduard Kaluza (1885-1954) propose di aggiungere una quinta dimensione (spaziale) alle quattro dimensioni spazio-temporali della relatività einsteiniana. Facendo ciò si poteva costruire una teoria in grado di descrivere tutte le forze della natura allora conosciute (forza gravitazionale e forza elettromagnetica). La mancata osservazione della quinta dimensione fu spiegata da Kaluza attraverso l'indipendenza da questa quinta coordinata di grandezze come la curvatura. In questo periodo risultava inoltre sempre più chiara l'incapacità di spiegare classicamente i processi atomici che venivano evidenziati e ciò portò allo sviluppo della fisica quantistica e quindi alla nascita della meccanica quantistica. Le traiettorie classiche degli elettroni attorno al nucleo vennero sostituite da configurazioni ondulatorie nello spazio-tempo, configurazioni che si ricavano da un'equazione differenziale formulata da Erwin Schroedinger (1887-1961).

Il fisico svedese Oskar Klein (1894-1977) cercò di stabilire attorno al 1926 se la teoria di Kaluza fosse compatibile con la meccanica quantistica; formulò un'equazione di Schroedinger in cinque variabili, le cui soluzioni si potevano interpretare come onde che si muovono in campi elettromagnetici e gravitazionali dello spazio-tempo.

Negli anni compresi tra il 1930 e il 1950 vennero scoperte le altre due forze fondamentali: la forza nucleare forte e quella debole. Dagli esperimenti di diffusione di Rutherford (1871-1937) intorno al 1910, che avevano rivelato la struttura atomica (elettroni orbitanti attorno ad un nucleo centrale denso con raggio di circa 10^{-12} cm), era stata in seguito evidenziata la composizione interna del nucleo nel 1932 ad opera di James Chadwick (1891-1974) e Joliot-Curie (1897-1956); si era notato come una forza, la forza nucleare forte, agente a distanze dell'ordine di 10^{-13} cm, determinava la struttura nucleare e la dinamica di protoni e neutroni, particelle costituenti il nucleo. Marie Curie (1867-1934), studiando la radioattività beta, aveva scoperto la forza nucleare debole, forza con raggio d'azione dell'ordine di 10^{-16} cm e che appare trattando i nuclei radioattivi. Molto importante fu anche il lavoro del fisico italiano Enrico Fermi (1901-1954). Egli elaborò nel 1934 una teoria completa del decadimento beta sulla base dell'esistenza di una nuova particella, da lui chiamata neutrino. Nel 1957 si ottenne una prova sperimentale dell'esistenza del neutrino. Oltre alla scoperta del neutrino, Fermi lavorò alla produzione di neutroni lenti per la disintegrazione dei nuclei; costruì la prima pila atomica e identificò circa 50 elementi radioattivi.

Gli ulteriori sviluppi nell'unificazione delle forze: Nel 1954 C. N. Yang e Robert L. Mills svilupparono una classe di teorie, dette teorie di gauge non abeliane, che sono una generalizzazione importante della teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo, nelle quali assume un ruolo centrale la teoria matematica dei gruppi di simmetria.

Nel 1967 Steven Weinberg, Abdus Salam e John C. Ward si servirono di alcuni importanti contributi di Peter Higgs, Sheldon Lee Glashow ed altri per dimostrare che tra le teorie di gauge non abeliane precedentemente menzionate una avrebbe potuto unificare la forza elettromagnetica con la forza nucleare debole. Questa teoria è la "teoria elettrodebole". Già all'inizio degli anni '70 gli esperimenti iniziavano a confermare alcune previsioni di questa teoria; la prova più importante è stata ottenuta al CERN (Organizzazione Europea per le Ricerca Nucleare) nel 1983 con la scoperta di tre particelle, i bosoni W^+, W^- e Z^0, con la massa esattamente prevista dalla teoria elettrodebole.

In quegli anni, inoltre, venne proposta una teoria, chiamata "cromodinamica quantistica", che descrive in maniera soddisfacente la forza nucleare forte. Anche questa teoria ha un buon accordo con gli esperimenti. La correttezza delle previsioni e l'eleganza matematica delle teorie menzionate hanno spinto i fisici nella costruzione di modelli teorici che unificano le tre forze precedenti (forza elettromagnetica e le due nucleari); sono detti "modelli di grande unificazione", o "modelli GUT" (Grand Unified Theories). Anche se non hanno ancora avuto una definitiva conferma sperimentale, i fisici ritengono che una loro versione potrebbe dare la corretta spiegazione unificata delle tre forze descritte.

Tutte queste teorie non considerano però la quarta forza, la forza gravitazionale; l'aggiunta di questa forza sembra comportare un aumento del numero di dimensioni, così come la teoria di Kaluza richiedeva una dimensione in più rispetto alle quattro dimensioni spazio-temporali della relatività einsteiniana. La dimensione aggiuntiva era dovuta al fatto che la teoria comprendeva un bosone in più, il fotone associato alla forza elettromagnetica. Non vi è una corrispondenza esatta tra il numero di bosoni necessari e il numero di dimensioni; tuttavia non è errato asserire che un numero maggiore di bosoni richieda un aumento delle dimensioni dello spazio-tempo. Quindi i tentativi di costruzione di teorie unificate possono richiedere un aumento delle dimensioni spazio-temporali ad un numero superiore a cinque. *[Segue al n. 28]*

*** Cultore di Fisica presso la Facoltà di Scienze, Istituto Policattedra, Università degli Studi di Verona.*

Un algoritmo per la determinazione dei numeri primi

di Paola Bovo ***

1. ***Introduzione:*** Determinazione dei numeri primi. Solitamente per determinare se un numero è primo lo si prova a dividere per tutti i primi precedenti minori o uguali alla radice quadrata del numero stesso. L'operazione, concettualmente semplice, diventa però di complessità crescente all'aumentare del numero delle cifre. La presente nota vuole mettere in evidenza, come sia possibile individuare un numero primo senza necessariamente ricorrere a divisioni successive, ma semplicemente in base alla posizione occupata in due successioni particolari. In pratica, in questo studio, si dimostra come dal confronto delle due successioni: $a_n = 6 \cdot n+5$ e $a_m = 6 \cdot m+1$, sia possibile individuare numeri primi in base ai soli valori di n ed m (n, m$\in$N).

2. L'algoritmo: Le due successioni in questione sono formate dall'insieme dei numeri congrui modulo 6 (mod6) di classe di resto 1 e 5. In altre parole sono ottenute dividendo tutti i numeri naturali per 6, considerando solo quelli che danno resto 1 (es: 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67, 73, 79, 85, 91, 97, 103, 109, 115, 121, 127, 133, 139, 145, 151, 157, 163, 169, 175, 181, 187,...) e resto 5 (es: 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65, 71, 777, 83, 89, 95, 101, 107, 113, 119, 125, 131, 137, 143, 149, 155, 161, 167, 173, 179, 185, …) e raggruppandoli separatamente in due successioni. La prima considerazione, (facilmente dimostrabile), è che esclusi 2 e 3, tutti i numeri primi appartengono a queste due successioni [[1]] anche se occorre notare che non tutti gli elementi delle successioni sono primi. La seconda considerazione deriva, come si diceva, dall'interazione fra le due successioni. Normalmente si è infatti abituati a vedere la successione dei numeri primi in ordine crescente: (2,3,5,7,9,11,13,17,19,23,29... …). Invece considerando le due successioni di resto 1 e 5 si notano 2 gruppi di numeri primi intercalati da altri non primi (p indica la posizione occupata nella successione da ciascun elemento):

r_1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_5	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71

r_1	73	79	85	91	97	103	109	115	121
p	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r_5	77	83	89	95	101	107	113	119	125

r_1	127	133	139	145	151	157	163	169
p	21	22	23	24	25	26	27	28
r_5	131	137	143	149	155	161	167	173

r_1	175	181	…
p	29	….	…
r_5	179	…	…

La particolarità di queste successioni consiste nella facile individuazione dei numeri non primi (e per esclusione dei primi) in base alla loro posizione occupata nelle rispettive successioni. Considerando il primo elemento della successione $\mathbf{r_5}$:(5) tutti i numeri che occupano la posizione multipla di 5, vale a dire l'elemento 5°, 10°, 15°, … (e cioè 35, 65, 95) non sono primi. Allo stesso modo considerando il secondo elemento della successione (11), tutti i numeri che occupano una posizione $11 \cdot t+1$-esima,(con t>0, e t$\in$N) vale a dire gli elementi che occupano la posizione 12°, 23°, 34°,… e così via, non sono primi. In generale per ciascun numero non primo della successione $\mathbf{r_5}$, la posizione dei numeri non primi è del tipo $((5+6 \cdot n) \cdot t +n)$ con $n \geq 0, t > 0$, n, t$\in$N dove n rappresenta la posizione del numero primo di riferimento. La successione $\mathbf{r_1}$ presenta la stessa particolarità della successione $\mathbf{r_5}$ a partire questa volta da (7): non sono primi tutti i numeri della successione che occupano una posizione $7 \cdot t+1$-esima (vale a dire gli elementi 8°,15°,21°…). In generale per questo tipo di numeri nella successione $\mathbf{r_1}$ la posizione occupata è del tipo $((1+6 \cdot m) \cdot t +m)$ con m, t >0, m, t$\in$N dove m rappresenta la posizione del numero primo di riferimento. Inoltre si nota come in questa successione siano presenti tutti i quadrati dei termini della successione $\mathbf{r_5}$ (es: 25 che è il quadrato di 5; 121 di 11; 289 di 17 ; 529 di 23 e così via). È facilmente dimostrabile che qualsiasi quadrato della successione $\mathbf{r_5}$ è di classe di resto 1 nella divisione per 6 e quindi appartiene ad $\mathbf{r_1}$. Anche questi quadrati vanno tolti, in quanto non primi, e i rispettivi multipli: (es : 25, e tutti i valori che occupano una posizione $5 \cdot t+4$-iesima; e poi 121 e tutti i numeri che occupano una posizione $11 \cdot t+ 20$-iesima). Tutte le posizioni da eliminare in questo caso sono del tipo: $(6n^2+10n+4+(5+6n)t)$ n, t ≥ 0 ed n, t$\in$ N con n che rappresenta la posizione del numero primo di riferimento nella successione $\mathbf{r_5}$.

I valori delle due successioni che sono stati eliminati sono non primi e quindi scomponibili. Con il procedimento sopra illustrato è possibile individuare molto velocemente e semplicemente tutti i numeri primi come elementi rimasti nelle successioni $(5+6 \cdot n)$ e $(1+6 \cdot m)$ una volta eliminati tutti i numeri non primi appartenenti alle suddette successioni, e di questi ultimi è possibile individuare i rispettivi fattori di scomposizione, senza ulteriori calcoli, ma unicamente partendo dalla posizione. Ogni numero è, infatti, uguale a 6 volte il valore della sua posizione più 5 se appartiene alla successione r_5, ed uguale a 6 volte il valore della sua posizione più 1 se appartiene alla successione r_1.

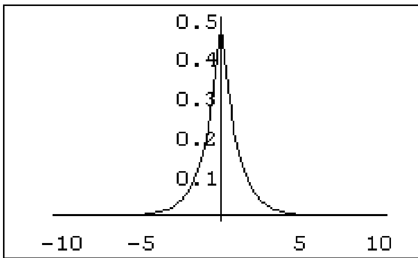
Eseguendo i calcoli è possibile determinare i fattori di scomposizione dei numeri non primi:

- $[n+(5+6n)t]6+5$
  $= 6n+30t+36nt+5$
  $= 6n(1+6t)+5(1+6t)$
  $= (6n+5)(1+6t)$
- $[6n^2+10n+4+(5+6n)t]6+1$
  $= 36n^2+60n+24+30t+36nt+1$
  $= 6n(5+6n)+5(5+6n)+6t(5+6n)$
  $= (5+6n)(5+6t+6n)$
- $[6m+1)t+m]6+1$
  $= 36mt+6t+6m+1$
  $= 6m(6t+1) + 6t+1$
  $= (6t+1)(6m+1).$

[Segue al n. 28]

Note: [[1]] : Nelle classi di resto 0, 2, 4 dei numeri congrui modulo 6 sono presenti solo numeri pari, nella classe di resto 3, sono presenti tutti i multipli di tre.

**** Docente presso l'I.T.C. P. Calamandrei di Roma*



La densità di probabilità di Laplace:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot Exp(-|x|)$$

*Dom: {x: x$\in$**R**}*