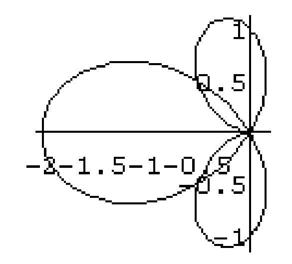
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 28 – aprile 2000



Un algoritmo per la determinazione dei numeri primi

di Paola Bovo *

[Segue dal n. 27] Riepilogando per un calcolo delle posizioni da eliminare nelle due serie e per individuare i divisori dei numeri non primi:

Posizione n° non primo successione r_1	**Fattori scomposizione**
$(1+6m)t + m \quad m,t>0$	$(1+6m)(1+6t)$
$6n^2+10n+4+(5+6n)t \quad n,t \geq 0$	$(5+6n)(5+6n+6t)$
Posizione n° non primo successione r_5	**Fattori scomposizione**
$n + (5+6n)t \quad n \geq 0, t>0$	$(5+6n)(1+6t)$

1. Conclusione

I valori non primi occupano le posizioni eliminate e sono valori scomponibili. I numeri primi occupano le posizioni nelle due successioni , che non sono state eliminate. Da ciò conseguono le seguenti considerazioni:

a) Ad n ed m vengono assegnate posizioni di numeri primi e di conseguenza la scomposizione dei numeri non primi determinati con il metodo illustrato precedentemente prevede i seguenti casi:

1). per i numeri appartenenti alla successione r_1, i fattori di scomposizione sono $(1+6m)(1+6t)$ oppure $(1+6m)(5+6n+6t)$

2). per i numeri appartenenti alla successione r_5 i fattori di scomposizione sono $(5+6n)(1+6t)$

Ogni elemento eliminato nelle due successioni è ottenibile come prodotto di due primi: entrambi appartenenti ad r_1 oppure entrambi appartenenti a r_5, o uno appartenente ad r_1 e l'altro appartenente ad r_5 ovvero di un numero primo per un elemento non primo sempre appartenente ad una delle due successioni.[2]

b) Se n ed m assumono un valore intero positivo qualunque, invece che unicamente i valori delle posizioni di un numero primo, vengono individuate posizioni di elementi non primi che si sovrappongono a quelle precedenti.[3]

c) Alcuni potrebbero vedere nel metodo illustrato una analogia con il crivello di Eratostene, perché , si potrebbe dire, che "si va per esclusione" nella determinazione dei numeri primi, una volta individuati quelli non primi, ma la particolarità dello studio sta

1. nell'aver individuato le due particolari successioni che contengono tutti i numeri primi ossia: condizione necessaria affinché un numero sia primo è che abbia resto 1 o 5 nella divisione per 6.;
2. nell'aver individuato i fattori di scomposizione che dipendono dalla posizione occupata dal numero non primo e dalla successione di appartenenza;
3. di poter attribuire, per il calcolo delle posizioni dei numeri non primi, qualsiasi valore intero positivo ad n, m, t e non solo valori appartenenti alle posizioni dei numeri primi.

Note:

[2]: Un numero primo può essere del tipo (5+6n) oppure (1+ 6m). I multipli dei numeri primi del tipo (5+6n) appartenenti alla successione r_5 sono: (5+6n)(5+6k) per classi di resto $r_5r_5= r_1$

(5+6n)(1+6k) per classi di resto $r_5r_1=r_5$

(5+6n)(2+6k) per classi di resto $r_5r_2=r_4$

(5+6n)(6k) per classi di resto $r_5r_0=r_0$

(5+6n)(3+6k) per classi di resto $r_5r_3=r_3$

(5+6n)(4+6k) per classi di resto $r_5r_4=r_2$

I multipli dei primi del tipo (5+6n) cadono in varie classi di resto: solo una coppia cade nella classe di resto r_5 ed è quella dei primi (5+6n) moltiplicati per (1+6k) ma questi sono esattamente i non primi individuati dalla dimostrazione inoltre ci sono dei multipli r_5r_5 che cadono nella classe di resto r_1.

I multipli dei primi del tipo (1+6m) sono:

(1+6n)(5+6k) per classi di resto $r_1r_5=r_5$

(1+6n)(4+6k) per classi di resto $r_1r_4=r_4$

(1+6n)(3+6k) per classi di resto $r_1r_3=r_3$

(1+6n)(2+6k) per classi di resto $r_1r_2=r_2$

(1+6n)(1+6k) per classi di resto $r_1r_1=r_1$

(1+6n)(6k) per classi di resto $r_1r_0=r_0$

Anche in questo caso i multipli dei numeri primi che cadono nella classe di resto r_1 sono unicamente quelli individuati dal prodotto r_1r_1 assieme ai prodotti r_5r_5 ottenuti precedentemente e che risultano essere quelli individuati dalla dimostrazione.

[3]: Esemplificando con gli elementi della successione r_5: assegnando ad n un valore intero positivo qualsiasi si ottengono, al variare di n e t, delle posizioni i cui valori corrispondenti nella successione r_5 sono numeri non primi scomponibili come (5+6n)(1+6t), ma se **(5+6n)** non è primo, a sua volta sarà scomponibile come **(5+6p)(1+6m)**(1+6t), se (5 +6p) è primo la scomposizione è finita, **(1+6m)(1+6t)** è esattamente un valore della successione r_1 del tipo **(1+6h)** e quindi (5+6p)(1+6h) è un elemento eliminato come multiplo del numero primo (5+ 6p). Se (5 +6p) non fosse primo, sarebbe a sua volta scomponibile etc…, ma comunque sempre appartenente ai valori non primi della successione.

Bibliografia: [B.1] E. Borel, "Les nombres premies", 1958, Parigi – [B.2] L.J. Goldstein,"A history of the number theorem", Amer. Math. Monthly 80,1973 – [B.3] P. Ribenboin, "The little book of big primes",1991, New York - [B.4] P.J.Davis," Il mondo dei grandi numeri", Zanichelli, 1965, Bologna – [B.5] E. T. Bell, "I grandi matematici", Sansoni, 1990, Firenze – F. Enriques,"Questioni riguardanti le matematiche elementari", Zanichelli, 1983, Bologna.

* Docente presso l'I.T.C. P. Calamandrei di Roma

$df(x_0) / dx = f'(x_0)$

di Maurizio Emaldi **

La funzione *f*: $I \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x)$, dove *I* è un intervallo aperto di **R**, è detta *derivabile in* x_0 se esiste un numero reale λ tale che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lambda \qquad (1)$$

dove $x=x_0+\Delta x$ è in *I*, e $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$. Questa condizione può essere posta nella forma:

$$\forall\, \varepsilon >0\ \exists\, \delta >0 :\ |\Delta f(x_0)-\lambda\cdot\Delta x| \leq |\Delta x|\cdot\varepsilon \qquad (2)$$

ogni volta che *x* è in *I*, $x \neq x_0$, $|\Delta x| < \delta$.

Il numero λ è detto derivata della *f* in x_0, e indicato con $f'(x_0)$ o col più versatile simbolo $df(x_0)/dx$.

La (2) ci consente di guardare $f'(x_0)$ dal punto di vista della geometria analitica e da quello dell'algebra lineare. Dal punto di vista della geometria analitica vediamo che $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della *f* in $(x_0,f(x_0))$. Prima di guardare $f'(x_0)$ dal punto di vista dell'algebra lineare, ricordiamo che, in analisi, è comodo denotare con *dx* la trasformazione lineare identità $dx: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h \to h$; dunque $(dx)\cdot h=h$ per ogni numero reale h. Ora, guardando $f'(x_0)$ dal punto di vista dell'algebra lineare vediamo che $f'(x_0)$ è la trasformazione lineare $f'(x_0)\cdot dx: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h \mapsto f'(x_0)\cdot h$. Questa è indicata con $df(x_0)$ e detta differenziale della *f* in x_0. Essa «approssima» $\Delta f(x_0)$ vicino ad x_0. Dunque abbiamo l'uguaglianza di trasformazioni lineari $df(x_0)= f^{I}(x_0)\cdot dx$. Allora, invece di dire che f è derivabile in x_0, si dice anche che f è differenziabile in x_0. La tentazione di «dividere» entrambi i lati della $df(x_0)= f^{I}(x_0)\cdot dx$ per dx in modo da ottenere

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f\,'(x_0)$$

è irresistibile: tuttavia questa "operazione" che non ha un significato nell'ambito delle trasformazioni lineari, fornisce un risultato desiderato!

*** Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Padova.*

Il ruolo dello spazio e del tempo nell'evoluzione delle teorie unificate

di Paolo Di Sia

[Segue dal n. 27] **Lo spazio fisico dall'intuizione all'astrazione: la supergravità e la superstringa:** Nel 1974 è stata scoperta una nuova simmetria, chiamata "supersimmetria". Essa è matematicamente molto elegante ed in grado di risolvere parecchi problemi, benché finora nessuna indicazione fenomenologica l'abbia posta in una posizione di rilievo nella descrizione della natura. La supersimmetria presenta proprietà alquanto diverse rispetto alle ordinarie simmetrie conosciute. La teoria della relatività generale di Einstein è una teoria geometrica della gravità. La supersimmetria può essere usata come base di una teoria geometrica della gravità; tale teoria si chiama "supergravità". Essa incorpora ed estende la teoria della relatività di Einstein. In questa teoria viene fissato il numero di dimensioni spazio-temporali; probabilmente le teorie di supergravità non sono valide per un numero di dimensioni spazio-temporali superiore a undici. Se infatti le dimensioni superano tale numero, non sembra possibile trovare il modo per correlare matematicamente i campi bosonici con quelli fermionici. Queste dimensioni aggiuntive formerebbero l'analogo a sette dimensioni di una sfera, che è la struttura più simmetrica e più semplice possibile. Le equazioni che si ricavano da queste teorie (dal momento che vi è più di una versione) danno però delle grandezze infinite non aventi interpretazione fisica. Tra i tentativi di superamento di questo problema, grande importanza hanno avuto nella fisica attuale le cosiddette "teorie di stringa", o "superstringa", nella versione supersimmetrica. Le teorie di stringa sono teorie in cui le coordinate del punto materiale vengono sostituite con le coordinate di una struttura unidimensionale, chiamata appunto stringa, o superstringa, nel caso di una teoria supersimmetrica. Tra le più promettenti dal punto di vista fisico vi sono quelle formulate in dieci dimensioni. In genere in queste teorie le dimensioni in eccesso vengono compattificate, cioè si "richiudono" su se stesse dando luogo in ogni punto ad una specie di spazio interno. Queste teorie appaiono essere finite e questo risolverebbe il problema degli infiniti visto precedentemente per le teorie di supergravità. Non si è ancora in grado di dire se queste teorie riveleranno delle inconsistenze tali da renderle inaccettabili. Nelle teorie in undici dimensioni, ad esempio, sono emersi alcuni problemi; su di esse erano state riposte grandi aspettative come teorie ultime descriventi la realtà naturale nel linguaggio delle teorie di campo. Un'altra strada intrapresa è quella della gravità quantistica. La gravità quantistica coinvolge relatività ristretta, relatività generale e meccanica quantistica. Vengono considerate lunghezze e tempi piccolissimi, dell'ordine dell'unità di lunghezza di Planck ($1{,}61\cdot 10^{-33}$ cm) e del tempo di Planck ($5{,}36\cdot 10^{-44}$ sec).Il vuoto, ispezionato in regioni spaziali sempre più piccole, diventa caotico e fluttuante. Alle dimensioni di Planck la distinzione tra passato e futuro diventa incerta.

Considerazioni conclusive: Come ci sono voluti tredici anni per trovare la modalità esatta di applicare le teorie di gauge non abeliane all'unificazione delle forze fondamentali, così potrà forse passare del tempo tra lo sviluppo di teorie matematiche descriventi la realtà naturale e la formulazione di previsioni che possano essere verificabili o verificate a livello sperimentale. Probabilmente occorrerà anche studiare nuovi concetti matematici per poter comprendere lo spazio e il tempo più alla radice. Questo processo di matematizzazione progressivo porta ad una sempre maggiore astrazione, ma permette di entrare sempre più nella comprensione delle categorie spazio-temporali. L'inizio di questo cammino può essere fornito proprio dalle precedenti teorie unificate sulle forze attualmente conosciute che governano il moto della materia dell'universo.

Equazioni parametriche razionali della quartica C^4: $x^4+x^2\cdot y^2-6\cdot x^2\cdot y+y^2=0$ (1) {ossia $(y-x^2)^2+x^2\cdot y\cdot(y-4)=0$}

di Marco Mantuano * e Nazario Magnarelli **

La curva è razionale perché ha tre punti doppi: $O(0,0)$, tacnodo di 1^a specie con tangenti principali sovrapposte $y = 0$ (esso vale per due punti doppi), e $Y_\infty(0,1,0)$, nodo isolato con tangenti complesse coniugate $x = \pm i$. La parabola p: $y - x^2 = 0$ interseca la C^4 nei punti $A(2,4)$, $A'(-2,4)$, $Y_\infty(0,1,0)$ (due volte) e $O(0,0)$ (quattro volte). La retta y=0 della conica degenere $y(x - 2)=0$ ha contatto 4-punto con la C^4 in O, mentre la retta x=2 passa semplicemente per il punto A della C^4 e doppiamente per il punto Y_∞. Consideriamo il fascio di coniche $|C_2|^1$: $y-x^2 = t\cdot y\cdot(x-2)$; esso ha i punti base $O(0,0)$, contato due volte, e i punti $Y_\infty(0,1,0)$, $A(2,4)$. Il fascio ha otto intersezioni con la C^4: quattro coincidono con il tacnodo O, due con il punto doppio Y_∞ ed una con il punto A.

Risolviamo il sistema

$$(I)\quad (y - x^2) + x^2 y(y - 4) = 0\,, \qquad y - x^2 = ty(x - 2)$$

esso si spezza nei due sistemi

$$(\alpha)\quad y - x^2 = ty(y - 2) \quad , \qquad y = 0$$

$$(\beta)\quad t^2 y(x - 2) + x^2 (y - 4) = 0 \;\; , \quad y - x^2 = ty(x - 2)$$

Il sistema (α) ci dà la soluzione doppia $O(0,0)$. Ricaviamo y dall'equazione (β.1) e sostituiamo nell'equazione (β.2); otteniamo un'altra soluzione doppia $O(0,0)$ più il sistema

$$(\gamma)\quad \begin{cases} y = 4x^2 \Big/ \left[t^2 (x - 2)^2 + x^2\right] \\ (x - 2)\left[t^2 (x - 2) + x + 2 + 4t\right] = 0 \end{cases}$$

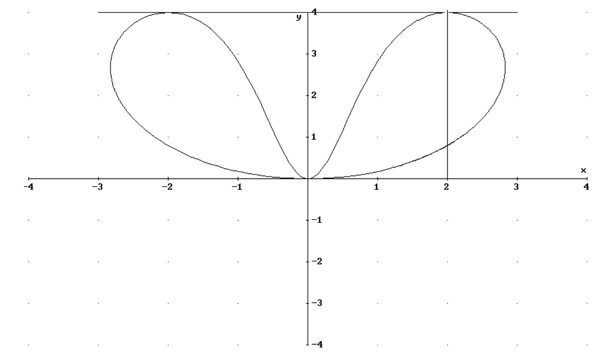
Da esso si ricava la soluzione $A(2,4)$ e l'equazione parametrica

$$x(t) = \frac{2(t^2 - 2t - 1)}{t^2 + 1}\,. \qquad (2)$$

Sostituendo la (2) nell'equazione del fascio $|C_2|^1$ si ricava

$$y(t) = \frac{4(t^2 - 2t - 1)^2}{(t^2 + 1)(5t^2 + 4t + 1)}\,.$$

Si veda, al computer, il grafico della C^4 con $-800 \le t \le 800$. Per $1 - \sqrt{2} \le t \le 1 + \sqrt{2}$ si ha la foglia posta a sinistra.



** Docente presso il Liceo Majorana di Latina*
*** Socio Mathesis di Latina*