MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 29 – maggio 2000

Per costruzione o da Teorema?

di Luciano Corso

Tra i quesiti proposti nelle gare di matematica dell'Università degli Studi "Bocconi" di Milano, in collaborazione con la Mathesis, è apparso il seguente quesito." Durante le ultime partite prima della finale della coppa di basket, abbiamo visto in tribuna una spia della squadra, nostra futura avversaria. Essa prendeva appunti circa la nostra tattica abituale. A questo punto dobbiamo scombussolare i punti di riferimento dei nostri avversari. Abbiamo così deciso di ridistribuire le nostre cinque maglie numerate in modo che nessuno di noi cinque indossi la maglia abituale. In quanti modi possiamo effettuare questa ridistribuzione?" Il problema può essere risolto in diversi modi. Ne propongo due, a confronto.

1° Modo (per costruzione). La risposta viene data senza necessità di avere una cultura matematica, in senso stretto. Il ragionamento muove dai seguenti passi elementari. A) Le cinque maglie possono essere considerate delle scatole numerate (perciò distinguibili), mentre i giocatori possono essere delle palline numerate. B) Se si prendono in considerazione due scatole qualsiasi, per esempio 1 e 2, ci sono due modi di collocare le palline in esse: o si scambiano le palline 1 e 2 nelle scatole 1 e 2, o non si pongono le palline 1 e 2 nelle due scatole a numeri corrispondenti. Nel primo caso si ha:

Scatole	1	2	3	4	5
Palline	2	1	4	5	3
Palline	2	1	5	3	4

Quindi vi sono due modi possibili in questo caso di scombinare. Nel secondo caso si ha

Scatole	1	2	3	4	5
Palline	2	3	1	5	4
Palline	2	3	5	1	4
Palline	2	3	4	5	1
Palline	2	4	1	5	3
Palline	2	4	5	3	1
Palline	2	4	5	1	3
Palline	2	5	1	3	4
Palline	2	5	4	1	3
Palline	2	5	4	3	1

Quindi vi sono 9 modi possibili di scombinare. Nel primo caso i modi vanno moltiplicati per 4, poiché vi sono 4 possibili modi di abbinare palline a scatole invertendo i numeri a due a due: in totale si hanno 2·4=8 modi. Ci sono quindi 4 modi di porre nella prima scatola le altre 4 palline. In totale i modo sono 9·4 = 36. Quindi complessivamente vi sono 8 + 36 = 44 modi di scombinare i numeri delle palline con quelli delle scatole.

2° Modo (attraverso l'applicazione di un teorema):

Si ottiene lo stesso risultato applicando il teorema di inclusione-esclusione di Poincaré-Da Silva sulla cardinalità di un insieme risultante da una unione di *n* insiemi con intersezione non vuota [B.1]. Lavoriamo sulle probabilità. Il teorema afferma che $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$

$= \sum P(A_{k1}) - \sum\sum P(A_{k1} \cap A_{k2}) + \sum\sum\sum P(A_{k1} \cap A_{k2} \cap A_{k3}) - \ldots$

ove *s* dell'indice k_s rappresenta il numero degli eventi che entrano in intersezione. Nel nostro caso si ha:

$$\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}+\binom{n}{3}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}-...+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}=$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}.$$

Ma noi cerchiamo il complementare di $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$:

$$P[\neg(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)] = 1-\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...-(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\right)$$

che nel nostro caso diventa:

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}=\frac{44}{120}$$

da cui si può notare che i casi favorevoli agli scombinamenti sono 44.

Il primo metodo non ha bisogno di alcuna particolare conoscenza teorica per essere applicato; richiede solo attenzione nello sviluppo di un ragionamento. Il secondo metodo invece richiede la conoscenza di un famoso teorema dovuto a Poincaré. Quale dei due metodi dovremmo apprezzare di più? Oggi i giochi di matematica prediligono i metodi costruttivi e le relative abilità connesse. Perciò noi dovremmo apprezzare di più un ragazzo che riesce a rispondere al quesito proposto applicando il primo metodo, rispetto al secondo. Ma allora, a che giova far apprendere ai nostri giovani tutta quella teoria matematica prevista dai programmi ministeriali?

Bibliografia: [B.1] Cerasoli, Eugeni, Protasi; "Matematica discreta", Zanichelli, Bologna, 1992

Equazioni parametriche razionali della quartica C^4: $(x^2+y^2-2\cdot x)^2-x^3=0$ (1)

$\{$ossia $y^4+2\cdot(x^2-2\cdot x)\cdot y^2+x^4-5\cdot x^3+4\cdot x^2=0\}$

*di Marco Mantuano * e Nazario Magnarelli ***

L'origine *O(0;0)* è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte *x=0* a contatto 4-punto con la C^4; ne segue che esso non è una cuspide di prima specie. Approssimando la (1) con il fascio di parabole $|C_2|^1$: $x=\lambda\cdot y^2$ si trovano due parabole iperosculatrici coincidenti, a contatto 6-punto con la C^4, di equazione

$$C_2^{(0)} \equiv \overline{C}_2^{(0)} : x=\frac{1}{2}y^2.$$

Approssimando ulteriormente con il fascio di cubiche

$$|C_3|^1 : x=\frac{1}{2}y^2+\mu\cdot y^3$$

si hanno due cubiche osculatrici distinte, a contatto 7-punto, di equazioni

$$C_3^{(0)} \equiv \overline{C}_3^{(0)} : x=\frac{1}{2}y^2 \pm \frac{\sqrt{2}}{8}y^3.$$

Ne segue che il punto doppio *O(0;0)* è un oscnodo. Esso vale per tre punti doppi quindi la C^4 è razionale. Questi tre punti doppi infinitamente vicini, non potendo stare sulla tangente *x=0*, stanno sulla parabola $2\cdot x-y^2=0$. Consideriamo ora il fascio di coniche $2\cdot x-y^2+t\cdot x\cdot(y-m\cdot x)=0$. Esso ha contatto 6-punto con la C^4 in *O*. Imponendo il passaggio per il punto *D(1;0)* della C^4 si trova *m=2 / t* e l'equazione del fascio si semplifica. Intersecando con esso la (1) si ha il sistema:

(α) $\quad 2x-y^2=x(2x-ty), \qquad (x^2+y^2-2x)^2-x^3=0.$

Ricavando y^2 dalla (α1) e sostituendo nella (α2) si ha

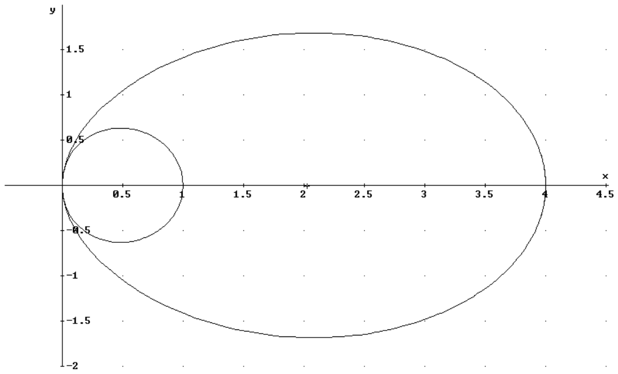
$x^2\cdot(t\cdot y - x)^2 - x^3 = 0$ cioè $x^2\cdot[(t\cdot y - x)^2 - x] = 0$.
Il sistema (α) si può così spezzare in due sistemi. Uno ha la soluzione *O(0;0)* contata quattro volte; l'altro sistema è:

$$(\beta)\quad \begin{cases} 2(ty-x)^2 - 2x = 0 \\ 2x - y^2 + txy - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

Sommando si ha $y\cdot(2\cdot t^2\cdot y - 3\cdot t\cdot x - y)=0$. Mettendo a sistema la (β.1) con *y=0* si hanno le soluzioni *O(0;0)* e *D(1;0)*. Rimane l'equazione $2\cdot t^2\cdot y - 3\cdot t\cdot x - y = 0$ da cui si ha: $x = y\cdot(2\cdot t^2 - 1) / 3\cdot t$. Sostituiamo infine questa espressione di *x* nell'equazione $(t\cdot y - x)^2 - x = 0$. Si ricava l'ultima soluzione *O(0;0)* e le equazioni parametriche della C^4:

$$\begin{cases} x(t) = \left(2\cdot t^2 - 1\right)^2 / \left(t^2+1\right)^2 \\ y(t) = 3\cdot t\cdot\left(2\cdot t^2 - 1\right) / \left(t^2+1\right)^2. \end{cases}$$

Si veda, al computer, il grafico della C^4 con $-\infty \le t \le +\infty$.

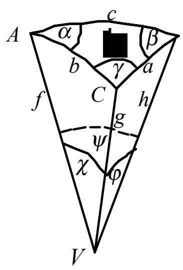


* *Docente presso il Liceo Majorana di Latina*
** *Socio Mathesis di Latina*

Cenni di trigonometria sferica

di Arnaldo Vicentini

Come nel piano un angolo al centro d'un cerchio di raggio *r* ampio α rad interseca la circonferenza nell'arco associato lungo αr, così un angoloide al centro d'una sfera di raggio *r* ampio Ω steradianti interseca la superficie sferica in un lembo associato di area $\Sigma = \Omega\cdot r^2$. In particolare, un triedro al centro interseca la superficie sferica in un triangolo sferico, oggetto di studio della trigonometria sferica. Questa si basa su 4 teoremi (qui di seguito enunciati e dimostrati), anche se i soli primi due sono indipendenti e sufficienti. Per il significato dei simboli impiegati si fa riferimento alla Fig. 1 che rappresenta un triedro *V*(*f*,*g*,*h*) – cioè di vertice *V* e spigoli *f*, *g* e *h* – che interseca la sfera di centro *V* e raggio *r* nel triangolo sferico *ABC*.



$$\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = r;\quad a = \varphi r;\quad b = \chi r;\quad c = \psi r;\quad \Sigma = \Omega r^2.$$

Fig. 1

2 Teorema dell'area (e dell'angolo solido).

Th. I $\quad \Sigma = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2;\qquad \Omega = \alpha+\beta+\gamma-\pi$.

Prova. In Fig. 2, prolungando i lati di *ABC* in tre cerchi massimi, la superficie sferica è divisa in 4 coppie di triangoli *antipodali* isometrici. Ognuno dei tre triangoli con un lato in comune con *ABC* è complemento di *ABC* rispetto al fuso associato all'angolo diedro opposto al lato comune. Perciò:

$$4\pi r^2 = [(2\alpha r^2 - \Sigma) + (2\beta r^2 - \Sigma) + (2\gamma r^2 - \Sigma) + \Sigma] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Sigma = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2 \Rightarrow \Omega = \alpha+\beta+\gamma-\pi.$$

Fig. 2

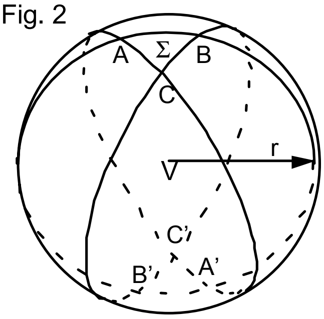
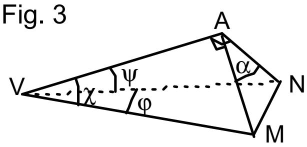


Fig. 3



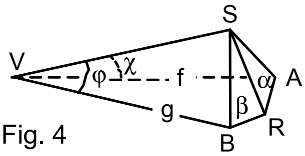


Fig. 4

3 Teoremi del coseno.

Th. II $\quad \cos(\alpha) = \dfrac{\cos(a/r) - \cos(b/r)\cos(c/r)}{sin(b/r)sin(c/r)}$.

[Analogamente per cos(β) e cos(γ) ruotando *a*, *b* e *c*].

Th. III $\quad \cos(a/r) = \dfrac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\gamma)}{sin(\beta)sin(\gamma)}$.

[Similmente per cos(*b/r*) e cos(*c/r*) ruotando α, β e γ].

Prova. In Fig. 3 il piano *AMN* è ortogonale a *VA*. Sicché:

$$\overline{VM} = \overline{VA}/\cos(\chi);\ \overline{AM} = [\overline{VA}/\cos(\chi)]sin(\chi);$$
$$\overline{VN} = \overline{VA}/\cos(\psi);\ \overline{AN} = [\overline{VA}/\cos(\psi)]sin(\psi).$$

Tenendo conto di ciò e applicando il teorema di Carnot ai triangoli *VMN* e *AMN* ricaviamo:

$$\frac{\overline{MN}^2}{\overline{VA}^2} = \frac{1}{\cos^2(\chi)} + \frac{1}{\cos^2(\psi)} - \frac{2\cos(\varphi)}{\cos(\chi)\cos(\psi)} =$$
$$= \frac{sin^2(\chi)}{\cos^2(\chi)} + \frac{sin^2(\psi)}{\cos^2(\psi)} - \frac{2\cos(\alpha)sin(\chi)sin(\psi)}{\cos(\chi)\cos(\psi)}.$$

La II si ricava esplicitando cos(α). Scrivendo la II per il triedro polare si ottiene la III, (ricordando che ogni angolo diedro d'un triedro è supplementare del corrispondente angolo facciale del triedro polare) e notando che se è $x+y=\pi$ allora si ha cos(*y*) =-cos(*x*) e *sin*(*y*)=sin(*x*). La III si può anche verificare sostituendovi ogni funzione del 2° membro con l'espressione ottenibile dalla II. Così facendo la III diventa del tipo: cos(*a/r*)= [cos(*a/r*)⊇*f*(φ,χ,ψ)]/*f*(φ,χ,ψ), dove *f*(φ,χ,ψ), invariante alle permutazioni di φ, χ e ψ, vale:

$$1 + 2\cos(\varphi)\cos(\chi)\cos(\psi) - \cos^2(\varphi) - \cos^2(\chi) - \cos^2(\psi).\ *)$$

4 Teorema dei seni.

Th. IV $\quad \dfrac{sin(\alpha)}{sin(a/r)} = \dfrac{sin(\beta)}{sin(b/r)} = \dfrac{sin(\gamma)}{sin(c/r)}$.

Prova. In Fig. 4, *ASR* è ortogonale a *VA* e *BSR* a *VB*; sicché:

$$\overline{RS} = [\overline{VS}\ sin(\chi)]sin(\alpha) = [\overline{VS}\ sin(\varphi)]sin(\beta).$$

Da qui la prima delle IV; e similmente per le altre due. Ma le IV si possono anche dimostrare utilizzando la II (e le analoghe per β e γ) per calcolare i numeratori trovando che allora i 3 rapporti diventano una medesima espressione invariante alle permutazioni di φ=*a/r*, χ=*b/r* e ψ=*c/r*. Questa vale:

$$k(\varphi,\chi,\psi) = \sqrt{f(\varphi,\chi,\psi,)}\,/[sin(\varphi)sin(\chi)sin(\psi)],$$

nella quale *f*(φ,χ,ψ) è l'espressione *) già incontrata nel dedurre la III dalla II.

Mathesis nazionale ha una nuova sede

La sede nazionale della Mathesis si è trasferita a Teramo, al seguente indirizzo:
MATHESIS NAZIONALE - Via Cadorna, 8 - 64100 Teramo - tel. e fax: 0861-244303. *E-mail*: mathesisnazionale@tiscali.it

Il presidente è prof. Franco Eugeni. Il vicepresidente è il prof. Andrea Laforgia. Il nuovo segretario nazionale è il prof. Antonio Maturo e risponde al seguente *e-mail*: maturo@ibmpe.unich.it

Il nuovo conto corrente bancario delle Mathesis Nazionale è: Banca di Roma agenzia di Roseto – 64026 Roseto degli Abruzzi (TE) – Coordinate bancarie: MATHESIS - C.ABI: 3002.3 - C.A.B.: 77020.6 - conto n. 15989 / 37.