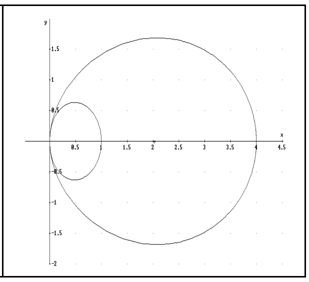
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 30 – giugno 2000



L'eleganza degli operatori in fisica: il gradiente

di Paolo Di Sia

Notazione adottata: i vettori sono indicati con una freccia posta sopra la lettera utilizzata o in grassetto; per gli scalari si considera semplicemente la lettera oppure il vettore in modulo. Il prodotto vettoriale viene indicato con la croce, il prodotto scalare con il punto.

Introduzione

I concetti di scalare e vettore sono concetti fondamentali della fisica e permettono di descrivere in modo elegante e conciso le leggi della natura. L'algebra vettoriale ci permette di sommare algebricamente vettori, di moltiplicare e dividere vettori per scalari e di moltiplicare vettori tra loro. I due prodotti tra vettori, il prodotto scalare, o interno, e il prodotto vettoriale, o esterno, intervengono nella formulazione di operatori che permettono di descrivere leggi in modo rigoroso ed elegante. Ancora più entusiasmante risulta l'estensione di questi concetti al caso quadridimensionale e in spazi con un numero di dimensioni superiore alle quattro spazio-temporali, come accade ad esempio nelle teorie unificate. Procedendo con ordine, iniziamo a vedere un po' in dettaglio quanto illustrato nella precedente panoramica qualitativa.

Dati due vettori **a** e **b**, si definisce prodotto scalare tra **a** e **b** lo scalare dato da:

$$S = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Il prodotto vettoriale tra **a** e **b** dà invece un vettore **c** le cui componenti si ricavano da:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

con **i**, **j**, **k** versori degli assi x, y, z.

Ricordiamo 4 importanti relazioni coinvolgenti i prodotti sopra descritti:

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \qquad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Gradiente

Dato un campo scalare S (x,y,z) e preso un generico punto P del dominio di S, se si opera uno spostamento infinitesimo da P in P', individuato con il vettore infinitesimo:

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

S varierà di conseguenza, a meno di infinitesimi di ordine superiore, della quantità:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz$$

dS è una quantità scalare e (dx,dy,dz) sono le componenti di un vettore.

Perciò se anche:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right)$$

vengono considerate come componenti di un vettore, si può scrivere il prodotto scalare:

$$dS = gradS \cdot d\vec{l}$$

dove con gradS si intende il vettore:

$$gradS = \frac{\partial S}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial S}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial S}{\partial z}\vec{k}$$

Il *gradiente* individua la direzione di massima variazione di S.

L'operazione di passaggio dallo scalare S al vettore **gradS** in genere è sempre possibile. Non è detto invece che, dato un campo vettoriale, esista sempre una funzione scalare di cui quel campo sia il gradiente. Se questo avviene, si dice che il campo vettoriale è *conservativo*.

Si può considerare anche il vettore simbolico:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Facendolo agire su uno scalare, si ritrova l'usuale definizione di gradiente:

$$\vec{\nabla} S = \frac{\partial S}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial S}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial S}{\partial z}\vec{k} = gradS$$

Successioni definite per ricorrenza

di Arnaldo Vicentini

L'intervento di Luigi Marigo sul numero n° 21 di *MatematicaMente* mi induce a considerare due argomenti trascurati nella consueta didattica, eppure molto usati in matematica applicata.

1. Osservazione importante

La successione $\{a_n\}$ è definita *intensivamente* se è data direttamente come funzione di $n \in \boldsymbol{N}$: $a_n = f(n)$. Molto spesso, però, la definizione è intensiva solo apparentemente! Per esempio, il termine corrente dello sviluppo in serie di potenze di *f(x)* indefinitamente derivabile in *x=0* è $a_n = f^{(n)}(0)x^n/n!$. Ma $f^{(n)}(x)$, x^n e *n*! sono tutte successioni definite *per ricorrenza*:

$f^{(0)}(0)=f(0); \qquad \forall n \in \boldsymbol{N} \qquad f^{(n+1)}(0)=df^{(n)}/dx|_{x=0}$;

$x^0=1; \qquad \forall n \in \boldsymbol{N} \qquad x^{n+1}=x \cdot x^n;$

$0!=1; \qquad \forall n \in \boldsymbol{N} \qquad (n+1)!=(n+1) \cdot n!$

2. Calcolo di uno zero d'una funzione

Si supponga di poter trasformare una data equazione *F(x)* =0 nell'equazione equivalente *x=f(x)*. Se, partendo da certo x_0, la successione $x_{n+1}=f(x_n)$ converge, il suo limite risolve *x=f(x*), ossia *F(x)*=0. Si voglia, ad es., calcolare $\sqrt{a}$, (*a* > 0). Allora: $F(x)=x^2-a$; $F(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2=x^2+a \Leftrightarrow x=(x+a/x)/2$; dunque $f(x)=(x+a/x)/2$. In questo esempio la successione $x_{n+1}=f(x_n)$ converge per ogni $x_0>0$. Infatti, detto ε_n l'errore relativo all'*n*-esimo passo, cioè $\varepsilon_n = x_n/\sqrt{a}-1$, onde $x_n=\sqrt{a}(1+\varepsilon_n)$, abbiamo:

$\varepsilon_n>-1; \qquad x_{n+1} = (x_n+a/x_n)/2 = \sqrt{a}[1+(\varepsilon_n^2/2)/(1+\varepsilon_n)];$

$\varepsilon_{n+1} = (\varepsilon_n^{\ 2}/2)/(1+\varepsilon_n)>0; \qquad 0 < \varepsilon_{n+2} < \varepsilon_{n+1}/2.$

È questo il "metodo del punto fisso". Il "metodo delle tangenti" di Newton ne è il caso particolare quando, data *F*(*x*)=0, si assuma *f*(*x*) =*x*-*F*(*x*)/*F'*(*x*), dove *F'*(*x*) è la derivata di *F*(*x*). Per *F(x*)=x^2-a, è proprio *x*-*F*(*x*)/*F'*(*x*)=(*x*+*a*/*x*)/2. Il metodo è particolarmente idoneo a risolvere equazioni trascendenti o algebriche di grado elevato. Si voglia per esempio sapere quale angolo x, con $0<x<\pi/2$, è metà della propria tangente. Abbiamo allora le equazioni equivalenti: $x=\tan(x)/2$; $x=\arctan(2x)$. Per ogni x_0 tra 0 e $\pi/2$ esclusi, $x_{n+1}=\tan(x_n)/2$ non va bene perché tende a 0; invece $x_{n+1}=\arctan(2x_n)$ tende al valore x cercato, (x=1.165 56…).

3. Le sequenze linearmente dipendenti.

Una successione $\{a_n\}$ è una funzione discreta $a_n=f(n)$ di $n\in\mathbf{N}$: ha un termine iniziale, cioè senza antecedente. Invece una sequenza $\{y_n\}$ non ha termine iniziale perché è una funzione $y_n=f(n)$ di $n\in\mathbf{Z}$: ogni termine ha un antecedente. La sequenza $\{y_n\}$ è *linearmente dipendente di ordine k* se esistono k+1 costanti c_h, (h=0, 1,..., k), tali che:

$$c_0 \neq 0;\ c_k \neq 0;\ \forall n \in \mathbf{Z},\quad \sum_{h=0}^{k} c_h \cdot y_{n+h} = 0 \qquad (1)$$

Ciò equivale a dire che nello spazio euclideo S_{k+1} esiste una direzione (non ortogonale al primo, né all'ultimo versore principale) ortogonale ad ogni (k+1)-pla ordinata di termini consecutivi della sequenza. Dalla (1) segue subito che ogni termine è ricavabile per ricorrenza come combinazione lineare dei k precedenti o successivi. Una progressione geometrica $\{g_n\}$ di ragione r>0 è una sequenza linearmente dipendente d'ordine 1 poiché per ogni n intero è $rg_n-g_{n+1}=0$. La sua definizione per ricorrenza é: $g_0=b$; $g_{n+1}=rg_n$. La sua legge di definizione intensiva é: $g_n= b\cdot r^n$. La cosiddetta "successione di Fibonacci" é la sequenza $\{f_n\}$ linearmente dipendente di ordine 2 così definita:

$f_0=1;\qquad f_1=1;\qquad \forall n\in\mathbf{Z},\qquad f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$.

Il problema fondamentale delle sequenze linearmente dipendenti è quello di passare dalla definizione per ricorrenza alla definizione intensiva. Il problema è analogo a quello di risolvere le equazioni differenziali lineari di ordine k. Anche qui la soluzione generale è combinazione lineare di k soluzioni particolari. Data la (1), note cioè le costanti c_1, ..., c_k, è detto *polinomio caratteristico* il polinomio associato:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{k} c_h \cdot x^h \qquad (2)$$

Ciò premesso, la legge intensiva è trovata sfruttando il seguente *teorema fondamentale*:

<u>Th.</u>: *Se α è zero di $P(x)$ con molteplicità m, allora, per ogni r intero tra* 0 *e m*-1 *inclusi, $y_n= n^r\alpha^n$ soddisfa la* (1).

Prova. Sia $P(\alpha)$=0. Allora, per r=0 abbiamo $y_n=\alpha^n$ e quindi:

$$\sum_{h=0}^{k} c_h \cdot y_{n+h} = \alpha^n \cdot \sum_{h=0}^{k} c_h \cdot \alpha^h = \alpha^n \cdot P(\alpha) = 0\,.$$

Se α è zero di $P(x)$ con molteplicità m>1, allora sono nulle le derivate $P^{(r)}(x)$ per $1 \le r \le m$-1. In tal caso si ponga:

$$Q_0(x) = P(x); \qquad Q_j(x) = \sum_{h=0}^{k} h^j \cdot c_h \cdot x^h\ .$$

Con ciò abbiamo:

$$Q_1(x) = \sum_{h=0}^{k} h\ c_h\ x^h = x\sum_{h=1}^{k} h c_h\ x^{h-1} = x\frac{d}{dx}Q_0(x)$$

$$Q_j(x) = \sum_{h=0}^{k} h^j c_h\ x^h = x\sum_{h=1}^{k} h\left(h^{j-1} c_h x^{h-1}\right) = x\frac{d}{dx}Q_{j-1}(x)\,.$$

Se α è zero di $P(x)=Q_0(x)$ con molteplicità m>r, allora è zero di $Q_1(x)$ di molteplicità m-1. Se α è zero di $Q_j(x)$ con molteplicità maggiore di 1, è zero anche di $Q_{j+1}(x)$. Se dunque α è zero di $P(x)$ con molteplicità m>r, è $Q_j(\alpha)$=0 per ogni j tra *0* ed r inclusi; e allora, per $y_n=n^r\alpha^n$ si trova:

$$\sum_{h=1}^{k} c_h\ y_{n+h} = \sum_{h=0}^{k} (n+h)^r\, \alpha^{n+h} = \alpha^n \sum_{h=0}^{k}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j} n^{r-j} h^j c_h\, \alpha^h =$$

$$\alpha^n \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j} n^{r-j} \sum_{h=0}^{k} h^j c_h\, \alpha^h = \alpha^n \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j} n^{r-j} Q_j(\alpha) = 0\,.$$

La soluzione generale della (1) è dunque combinazione lineare di k soluzioni particolari indipendenti. Le k costanti della combinazione sono determinate dalla conoscenza di k termini consecutivi della sequenza. *(segue al numero 31)*

Appunti per un testo teatrale

di Ivano Arcangeloni *

Dialogo tra due vettori

Siamo linearmente indipendenti, lo siamo sempre stati, se così non fosse il nostro sottospazio avrebbe dimensione uno, ed invece ha dimensione due, e ciò mi sembra sufficiente a dimostrare che noi siamo una base. Certo potrei appiattirmi su di te, diventare una tua combinazione lineare, ridurre la dimensione del nostro sottospazio, ma quale guadagno ne avremmo? Diventeremmo uno spazio banale, senza complessità, appiattito sul suo campo di scalari. Già, c'è anche quello, abbiamo scelto un campo finito con pochi elementi, ciclico, che ripete sempre gli stessi risultati, chiuso rispetto alle operazioni che vi abbiamo definito, e anche questo può deteriorarci. Magari non avremmo saputo che farcene di un campo completo, come se gli irrazionali e i trascendenti non creassero già abbastanza problemi, ma siamo fatti così, ci piace interrogarci anche sugli immaginari puri, desiderare un'unità immaginaria, sperare che un domani riusciremo finalmente a superare il reale.

«Riducimi in forma canonica»

Ecco, ora puoi scoprire il mio nome, conosci la matrice dei miei coefficienti, tutti i miei valori ti sono noti. E allora procedi, classificami, riducimi in forma canonica, scoprirai che non sono come temevi, o forse, chissà, speravi, una conica degenere; finalmente potrai condurmi tangenti da un qualunque punto della mia superficie. No, non sento dolore, solo, attento a non sfiorare i miei coseni direttori, se credi dopo puoi diagonalizzarmi, calcolare tutti i miei autovalori, i miei autospazi.

Vieni, cambiamo sistema di riferimento, tutto sarà più semplice: più semplice determinare distanze, più semplice scoprire punti notevoli, più semplice riconoscere centro e assi e soprattutto asintoti. VOGLIO CONVERGERE! Sii tu il mio asintoto, voglio tendere a te, avvicinarmi indefinitamente. Qualunque numero *epsilon* tu voglia concepire, la mia distanza da te sarà ancora più piccola, fino a tendere a zero quanto più noi ci avviciniamo all'infinito. Senza tuttavia essere mai veramente zero, per la nostra impossibilità di raggiungerlo l'infinito. A meno che non si proceda ad una compattificazione, ma all'amaro prezzo di perdere in generalità: io non sarei più io e tu potresti confondermi con una qualunque altra conica, e questo non potrei mai accettarlo. *(Segue al numero 31)*

** Docente di matematica presso l'ITIS G. Marconi di Verona, socio Mathesis, di Forlì*

Per costruzione o da teorema?

L'articolo apparso con lo stesso titolo sul numero 29 di MatematicaMente, presenta alcune difficoltà di interpretazione dovute ad un eccessivo ermetismo formale. Cercherò di eliminarle ora.

1) Non sono stati dichiarati i significati degli eventi A_k. Anche se essi sono facilmente interpretabili, con riferimento al nostro problema, sarebbe stato opportuno dichiararli. Ecco fatto: A_k = "C'è corrispondenza tra k-esimo ruolo giocato e k-esimo numero sulla maglia del giocatore". Cioè A_k è l'abbinamento della palla numero k con la scatola numero k.

2) Non è chiaro il senso dell'indicatore s in A_{ks}..

Il teorema di Poincaré-Da Silva applicato al calcolo delle probabilità, nella sua espressione formale più chiara, ma anche più estesa, può essere scritto nel modo seguente:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k_1=1}^{n} P\left(A_{k_1}\right) - \sum_{k_1=1}^{n-1}\ \sum_{k_2=k_1+1}^{n} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots +$$

$$-(-1)^n \cdot \sum_{k_1=1}^{n-(n-1)}\ \sum_{k_2=k_1+1}^{n-(n-2)} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}+1}^{n} P\left(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_n}\right)$$

la cui interpretazione non presenta difficoltà.

Colgo l'occasione per segnalare una relazione generale che consente di calcolare il numero di scombinamenti a_n: $a_1=0$; $a_2=1$; $a_3=2$; …; $a_n=(n-1)\cdot(a_{n-1}+a_{n-2})\ \forall\ n\in N$ (prova omessa). Nel nostro caso si ha : $a_4=9$; $a_5=4\cdot(9+2)=44$. (*di Luciano Corso*)