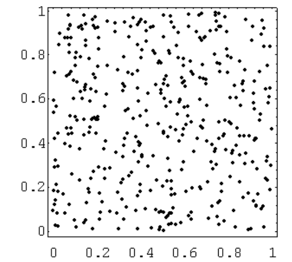
# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 31 – luglio 2000




## Successioni definite per ricorrenza

di Arnaldo Vicentini

*(Segue dal numero 30)*

**3.1** Un esempio. Sia $\{a_n\}$ una progressione aritmetica, cioè:

$a_0 = b\ ;\ \ \forall n \in \boldsymbol{N},\ a_{n+1} = a_n + d$ .

Allora, per ogni $n$, abbiamo: $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ , ossia:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0\ ;\ P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \qquad (2)$$

Il polinomio caratteristico ha uno zero solo e doppio: $\alpha=1$. Dal teorema fondamentale segue che la soluzione generale è: $a_n = A\cdot 1^n + B\cdot n\cdot 1^n = A+n\cdot B$, che diventa la progressione data per $A=b$ e $B=d$.

**3.2** Sequenze armoniche. Sono le sequenze linearmente dipendenti di ordine 2 con polinomio caratteristico con zeri distinti non reali di modulo 1, ossia del tipo:

$$P(x) = x^2 - 2kx + 1, \qquad (-1 < k < 1). \qquad (3)$$

Posto $k=\cos(\varphi)$, i due zeri di $P(x)$ sono $\alpha_{1,2}=\cos(\varphi)\pm i\sin(\varphi)$.

Ogni sequenza armonica a termini reali è perciò del tipo:

$$y_n=A\cdot sin(\vartheta+n\varphi) \qquad (4)$$

Allora, infatti:

$$y_{n+1}=Asin(\alpha+n\varphi)cos(\varphi) + Acos(\alpha+n\varphi)sin(\varphi);$$

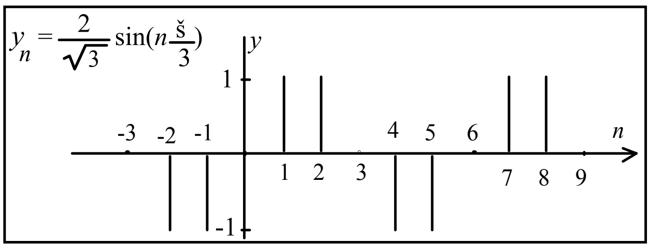
$$y_{n-1}=Asin(\alpha+n\varphi)cos(\varphi) - Acos(\alpha+n\varphi)sin(\varphi);$$

$$y_{n+1} + y_{n-1}=2cos(\varphi)\ ;\ \ P(x) = x^2 - 2cos(\varphi)\cdot x + 1. \qquad (5)$$

$A$ e $\vartheta$, costanti arbitrarie, e $\varphi = arccos(k)+2m\pi$ – con $m$ intero arbitrario – sono dette rispettivamente *ampiezza*, *fase iniziale* e *pulsazione*. Una sequenza armonica è dunque il campionamento d'una sinusoide ad intervalli uguali lunghi $\varphi$ radianti. Interessante è il fatto che se $\varphi/\pi$ non è razionale, la sequenza armonica, benché *sinusoidale*, non è periodica.

Le sequenze costanti e quelle alternate – progressioni geometriche di ragione rispettiva 1 e –1 – sono casi limite di sequenze armoniche: le prime per $\varphi = 2m\pi$, le seconde per $\varphi =(2m+1)\pi$, [con $m$ intero arbitrario]. Anche le progressioni aritmetiche sono un caso limite di sequenze armoniche: quello in cui, assunte l'ampiezza $A$ e la fase iniziale $\vartheta$ la prima inversamente proporzionale alla pulsazione $\varphi$ e l'altra direttamente proporzionale, si faccia poi tendere $\varphi$ a zero. Infatti, per $A=d/\varphi$ e $\vartheta=(b/d)\varphi$, dalla (4) si trova:

$$[\varphi\to 0] \Rightarrow [Asin(\vartheta+n\varphi) \to ((d/\varphi)\cdot sin((b\varphi/d+n\varphi)) \to b+nd].$$




## Appunti per un testo teatrale

di Ivano Arcangeloni *

*(Segue dal n. 30)*

***Un accoppiamento congruente***

Vedi? Possiamo sovrapporci in un movimento rigido. Ti rifiutavi di crederlo, tu con tutti i tuoi angoli ottusi, e invece é così, semplice, chiaro, siamo equivalenti, isomorfi. C'è stato un periodo nel quale tu eri medio proporzionale tra proiezioni di cateti estranei, ma l'ho accettato, ti ho perdonato: ho raccolto tutti gli assiomi nei quali credo, quelli d'incidenza e quelli di completamento, e ti ho assolto da ogni colpa. Ma ora pretendo da te che tu ti accorga di questa nostra congruenza. Dimostrarla é immediato: abbiamo un lato in comune, un angolo é retto, e gli altri due sono alterno interni formati dalle parallele della tua giovinezza con la trasversale della mia ansia. Non ci sono equivoci, non puoi più oltre esitare, io sono qui, di fronte a te, coi miei angoli, i lati sui quali a lungo amavi soffermarti un tempo non lontano, la mia area, ho messo in gioco anche quella, a tutto ho rinunciato perché tu potessi oggi finalmente sovrapporti a me. E allora vieni, abbi il coraggio delle tue deduzioni, liberati dal poligono che t'imprigiona, e infine corrispondi con me in questa isometria.

***Prova a integrarmi***

Vorresti provare a integrarmi? Ti sembra difficile? Oh, lo so, non sono una funzione di cui si possa determinare una primitiva in modo immediato. Forse non sono nemmeno una funzione analitica. Non devi avere paura, però: io saprò guidarti, io ti aiuterò ad esplorarmi. Hai una qualche idea di come cominciare? No, così no, non ti conviene assolutamente passare alle coordinate polari, complicheresti ulteriormente una situazione già di per se' intricata. Sai qual è la cosa che più ti blocca? La tua ostinazione a voler determinare per me un valore esatto. Accontentati di una buona stima, sarebbe già un risultato del quale andare fieri; io lo so bene: molti altri prima di te hanno fatto il tuo stesso errore. Io li lasciavo fare, perdevano notti interminabili in inutili tentativi, hanno provato ad integrarmi per parti, poi per sostituzione, e infine anche per fratti semplici! Assurdo, veramente assurdo! IO li guardavo, divertita e anche un poco amareggiata, poi alla fine, quando già fuori faceva l'alba, dicevo in un sussurro: questa strada non ti porterà mai a nulla, mai... MAI.

Con te é diverso: di te mi fido, con te ne ho voglia, ti guiderò: osservami bene, e poi, con molta calma, sviluppami in serie, dopo potrai integrarmi termine a termine sfruttando la mia linearità. No, stai tranquillo, non sto soffrendo, solo un poco... ma é già passato, non é nulla. Ecco, vedi come tutto può essere semplice? Basta poco, un poco di pazienza, solo un poco di pazienza... Sì é vero: é solo un'approssimazione, ma non grossolana. E comunque è tutto quello che di me si possa calcolare.

** Docente di matematica presso l'ITIS G. Marconi di Verona, socio Mathesis, di Forlì*

## Interpretazione geometrica dell'algoritmo di Gauß-Jordan

di Arnaldo Vicentini

### 1 *Richiami*

L'algoritmo di Gauß-Jordan è propriamente un metodo di trattamento dei sistemi lineari di $n$ equazioni in $n$ incognite determinati; e consiste nel trasformare il dato sistema $\boldsymbol{Av}=\mathbf{I}\boldsymbol{b}$ – dove $\boldsymbol{A}$ è la matrice quadrata non singolare dei coefficienti, $\boldsymbol{v}$ il vettore delle incognite, $\mathbf{I}$ la matrice identità e $\boldsymbol{b}$ il vettore dei termini noti – in uno (risolubile immediatamente per sostituzione) del tipo $T_L(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{v}=B(\mathbf{I})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ – dove $T_L(\boldsymbol{A})$ è una matrice *triangolare inferiore*, cioè tale che i suoi elementi $t_{h,k}$ sono nulli per $h<k$ –, secondo lo schema seguente:

$$\begin{cases} a_{1,1}\cdot x_1+\ldots+a_{1,n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1+\ldots+a_{2,n}\cdot x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\cdot x_1+\ldots+a_{n,n}\cdot x_n=b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{1,1}\cdot x_1 = c_1 \\ t_{2,1}\cdot x_1+t_{2,2}\cdot x_2 = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{n,1}\cdot x_1+\ldots\ldots+t_{n,n}\cdot x_n=c_n \end{cases} \quad (1)$$

Essendo il sistema determinato, $\forall k\in\{1..n\}, t_{k,k}\neq 0$.

Per trasformare $\boldsymbol{A}$ in $T_L(\boldsymbol{A})$ viene ripetuto un algoritmo elementare in cui ad una colonna (in ordine decrescente partendo dall'ultima) o ad una riga (in ordine crescente partendo dalla prima) è sommata una opportuna combinazione lineare delle altre che annulla il primo elemento non nullo di una colonna (in ordine crescente di riga) o l'ultimo non nullo di una riga (in ordine decrescente di colonna). Per economia la combinazione lineare è presa con tutti i pesi nulli tranne quello per una sola colonna (o riga). Affinché il sistema si trasformi ad ogni passo in uno equivalente occorre e basta fare su **I** le stesse operazioni fatte su $\boldsymbol{A}$. $B$(**I**) è dunque la trasformata di **I** attraverso tutte le operazioni che hanno trasformato $\boldsymbol{A}$ in $T_L(\boldsymbol{A})$.

Il metodo di Gauß-Jordan può essere riapplicato al nuovo sistema triangolare dopo averlo scritto invertendo l'ordine delle equazioni e delle incognite. Ripristinato l'ordine a processo concluso, il sistema dato $\boldsymbol{Av}=\mathbf{I}\boldsymbol{b}$ si è trasformato in uno del tipo $\boldsymbol{Dv}=\boldsymbol{Mb}$, dove $\boldsymbol{D}$ è una matrice diagonale e $\boldsymbol{M}$ è la trasformata di **I** attraverso il medesimo processo che ha trasformato $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{D}$. Infine il sistema diventa esplicito (ossia risolto) dividendo ogni riga $h$-esima di $\boldsymbol{D}$ e di $\boldsymbol{M}$ per l'elemento $d_{h,h}$ di $\boldsymbol{D}$ (o, equivalentemente, dividendo le colonne se il sistema è posto nella forma $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{I}$ [NB: Gli elementi $d_{h,h}$ di $\boldsymbol{D}$ diagonale risultano tutti diversi da zero essendo det($\boldsymbol{D}$)=det($\boldsymbol{A}$)≠ 0 per ipotesi]. Il metodo è convenientemente usato nel calcolo della matrice inversa poiché in definitiva risulta $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{M}$.

## 2 *Interpretazione geometrica del metodo di Gauß-Jordan*

È facile mostrare che la trasformazione che produce $\boldsymbol{D}$ da $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{M}$ da **I** altro non è che il moltiplicare a sinistra entrambi i membri di $\boldsymbol{Av}=\mathbf{I}\boldsymbol{b}$ per una stessa opportuna matrice quadrata $\boldsymbol{Q}$ – con det($\boldsymbol{Q}$)≠0, anzi det($\boldsymbol{Q}$)=1– (oppure a destra entrambi i membri di $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{b}^T\mathbf{I}$ per $\boldsymbol{Q}^T$) la quale riassume tutte le trasformazioni fatte di passo in passo. Per accertare ciò, incominciamo col considerare il seguenti teoremi (di dimostrazione immediata per via costruttiva):

**Th. 1a**. *L'operatore c(h,k) che sostituisce la colonna k-esima di una matrice quadrata con la h-esima e annulla tutte le altre è rappresentato dalla matrice-fattore-destro* $R(h,k)$ *ottenuta dalla matrice nulla sostituendo in essa lo zero di posto* $(h,k)$ *con* 1.

**Th. 1b**. *L'operatore r(h,k) che sostituisce la riga k-esima di una matrice quadrata con la h-esima e annulla tutte le altre è rappresentato dalla matrice-fattore-sinistro* $L(h,k)=R^T(h,k)=R(k,h)$ *ottenuta dalla matrice nulla sostituendo in essa lo zero di posto* $(k,h)$ *con* 1.

Esempio: Metti la 3ª colonna per 2ª e annulla le altre.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ x & y & z \end{bmatrix} \quad ; \quad R(3,2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$A\cdot R(3,2)=\begin{bmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ x & y & z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo ora il primo passo del metodo, quello in cui viene annullato l'elemento di posto $(1,n)$, e supponiamo di operare per colonne. Scelta la colonna $j$-esima con $a_{1,j}\neq 0$, la si moltiplica per $p_{1,n}=a_{1,n}/a_{1,j}$ e il risultato si sottrae alla colonna $n$-esima. Cio equivale a fare il prodotto di $A$ per il fattore destro $P_{1,n}=\mathbf{I}-p_{1,n}\cdot R(1,n)$. Analogamente per ogni altro passo. In generale, dovendo annullare l'elemento di posto $(h,k)$, occorre scegliere la $j$-esima colonna con $j>h$-1 (e $a_{h,j}\neq 0$) in modo da avere $a_{i,j}$=0 per ogni $i<h$. Il passo corrente equivale al prodotto per la matrice $P_{h,k}=\mathbf{I}-p_{h,k}R(h,k)$ con $p_{h,k}=a_{h,k}/a_{h,j}$.

Dal punto di vista geometrico, la trasformazione che produce $T_L(\boldsymbol{A})$ da $\boldsymbol{A}$ è l'affinità centrale rappresentata da:

$$P=\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{h=1}^{n-k}\left(\mathbf{I}-p_{h,n-k+1}\cdot R(h,n-k+1)\right) \quad (2)$$

Per fissare le idee, consideriamo $n$=3. Alle tre colonne corrispondono tre vettori $\boldsymbol{c}_k$ (con $k$ tra 1 e 3 inclusi) rappresentati da tre segmenti orientati di origine $O(0,0,0)$ e termine $P_k$ $(a_{1,k}, a_{2,k}, a_{3,k})$. Questi individuano il parallelepipedo $\Pi_A$ (di cui sono spigoli) il volume del quale è:

$$V(\Pi_A)=|\boldsymbol{c}_1\cdot(\boldsymbol{c}_2\times\boldsymbol{c}_3)|=|det(\boldsymbol{A})|. \quad (3)$$

L'affinità rappresentata dal singolo passo è tale che deforma il parallelepipedo in modo da annullare una componente di uno degli spigoli con origine in $O$ (e di quelli a lui paralleli). Questa consiste in uno scorrimento nella direzione di uno degli altri due e di valore proporzionale alla distanza dalla faccia che questi individuano. Alla fine, quando $\boldsymbol{A}$ diventa $\boldsymbol{D}$ diagonale, $\Pi_A$ diventa $\Pi_D$: rettangolo, con spigoli paralleli agli assi e volume $V(\Pi_D)=V(\Pi_A)$.

## *Antinomia di Bertrand Russell*

$$\boxed{[\omega=\hat{x}(x\sim\in x)]\Rightarrow[\omega\ \sim\in\omega\ \equiv\omega\ \in\omega]}$$

i simboli indicano:

| | | |
|---|---|---|
| $\hat{x}(\ldots)$ | = | *classe di tutti gli insiemi tali che ...* |
| $\in$ | = | *simbolo di appartenenza* |
| $\sim$ | = | *simbolo di negazione* |
| $\Rightarrow$ | = | *se … allora …* (*implicazione*) |
| $\equiv$ | = | *… se e solo se …* |



## *L'inverosimile della vita*

*C'è dell'inverosimile nella nostra natura. La cosa che più mi risulta difficile credere è che, per caso, la materia sia riuscita, per evoluzione cosmica, a selezionare un individuo con un cervello capace di leggere, interpretare e studiare la materia stessa e la sua evoluzione passata, presente e – in previsione – anche futura. È davvero impressionante pensare che, per caso, la materia sia riuscita ad arrivare a tanto, a darsi un cervello pensante, capace di analisi così sottili e profonde, in grado di leggersi dentro. (di Luciano Corso)*