MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 32 – agosto 2000

Funzione di ripartizione di una particolare trasformazione

di Luciano Corso

Sia data la seguente trasformazione sulle variabili aleatorie X,Y: Z=2·X +Y. Siano {X: 0<X< 2; X∈R} e {Y: 0<Y< 3; Y∈R} i domini delle due v.a. X e Y. Sia, infine, h(X,Y)= (1/9)·X·Y una funzione di densità di probabilità congiunta delle due v.a. X,Y. Determinare la funzione di ripartizione H(z) di Z e il suo campo di esistenza.

Definiamo la funzione di ripartizione di una v.a.: Sia *Z* una v.a. definita in un certo dominio *Dom*. Per funzione di ripartizione di *Z* si intende la probabilità di avere uno *Z* minore o uguale a *z*; cioè:

$H(z)=P(Z \le z)$. (1)

Il prodotto cartesiano $Dom(X) \times Dom(Y)$ genera un rettangolo in coordinate cartesiane. Occorre osservare che *H(z)* è definito su tutto l'asse reale. Quindi:

1) $\{Z \le 0\} \Rightarrow H(z) = 0$.

Infatti $\{X\le 0 \cap Y\le 0\} \Rightarrow P(2\cdot X+Y\le 0)=0$.

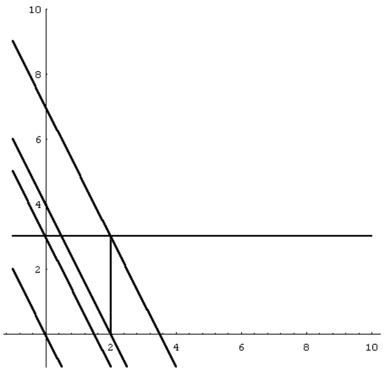

Figura 1

2) $\{0 < Z \le 3\} \Rightarrow H[z] = P(Z \le z \mid 0 < Z \le 3)$; in questo caso *H(z)* va calcolato integrando la densità congiunta *h(X,Y)* nel dominio $\{X{:}0< X\le Z/2\}\times\{Y{:}0<Y\le -2X+Z\}$:

$$H(z)=H(z=0)+\int_{X=0}^{z/2}\int_{Y=0}^{-2\cdot x+z}\frac{1}{9}\cdot X\cdot Y\cdot dX\cdot dY=\frac{z^4}{864}$$

3) $\{3 < Z \le 4\}\Rightarrow H(z) = P(Z\le z \mid 3 < Z \le 4)$; in questo caso *H(z)* va calcolato integrando la densità congiunta *h(X,Y)* nel dominio $\{X;\ (3-y)/2 < X \le (z-y)/2\}\times\{Y{:}0<Y\le 3\}$

$$H(z)=H(z=3)+\int_{X=(3-y)/2}^{(z-y)/2}\int_{Y=0}^{3}\frac{1}{9}\cdot X\cdot Y\cdot dX\cdot dY=$$

$$=\frac{81}{864}+\frac{9\cdot z^2-36\cdot z-81+108}{144}=\frac{54\cdot z^2-216\cdot z+243}{864}$$

4) $\{4 < Z \le 7\} \Rightarrow P(Z\le z \mid 4 < z \le 7)$. *H(z)* va calcolato integrando la densità congiunta *h(X,Y)* nel dominio $\{X;\ (z-y)/2 < X \le 2\}\times\{Y{:}-2x+z < Y \le 3\}$:

$$H(z)=H(z=4)+\int_{X=(z-y)/2}^{2}\int_{Y=-2\cdot x+z}^{3}\frac{1}{9}\cdot X\cdot Y\cdot dX\cdot dY=.$$

$$=\frac{-z^4+150\cdot z^2-728\cdot z+1011}{864}$$

La funzione di ripartizione è dunque definita nel modo seguente:

$$H(z)=\begin{cases} 0 & \{z\le 0\} \\ \dfrac{z^4}{864} & \{0<z\le 3\} \\ \dfrac{54\cdot z^2-216\cdot z+243}{864} & \{3<z\le 4\} \\ \dfrac{-z^4+150\cdot z^2-728\cdot z+1011}{864} & \{4<z\le 7\} \\ 1 & \{z>7\} \end{cases}$$

La fig. 1 dà una rappresentazione grafica del dominio di H(z).

L'eleganza degli operatori in fisica: la divergenza e il laplaciano

di Paolo Di Sia

Notazione adottata: i vettori sono indicati con una freccia posta sopra la lettera utilizzata o in grassetto; per gli scalari si considera semplicemente la lettera oppure il vettore in modulo. Il prodotto vettoriale viene indicato con la croce, il prodotto scalare con il punto).

Divergenza

Dato un campo vettoriale, si definisce *divergenza* del campo la quantità scalare:

$$div\,\vec a=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

L'operazione permette il passaggio da un campo vettoriale ad uno scalare. Sussiste il *teorema della divergenza*: *data una superficie chiusa Σ che racchiude un volume τ (con Σ e τ completamente contenuti nel dominio del campo), il flusso attraverso Σ del campo vettoriale è uguale all'integrale esteso al volume τ della divergenza del campo*:

$$\Phi_\Sigma(\vec a)=\int_\Sigma \vec a\cdot d\vec\Sigma=\int_\tau div\vec a\, d\tau$$

Un campo vettoriale con divergenza ovunque nulla si dice *solenoidale*. L'introduzione del vettore simbolico "del" permette di ridurre a prodotti di <u>*vettori per vettori*</u> o di <u>*vettori per scalari*</u> le operazioni differenziali viste, con l'avvertenza che <u>*non*</u> vale la proprietà commutativa. Si ottiene concisione nel calcolo e una notevole eleganza formale. Utilizzando il vettore simbolico "del" si avrà:

$$\vec\nabla\cdot\vec a=\frac{\partial a_x}{a_x}+\frac{\partial a_y}{a_y}+\frac{\partial a_z}{a_z}=div\,\vec a$$

Laplaciano

L'operatore laplaciano si ottiene considerando il prodotto scalare degli operatori "del":

$$\vec\nabla\cdot\vec\nabla=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

È un operatore scalare che agendo su uno scalare darà un campo scalare, agendo su un vettore darà un campo vettoriale.

Il paradosso del collegio docenti

di Giovanni Munaretto *

In un paese felice, lavoravano in una scuola insegnanti, preside, alunni e tanti altri, senza che gravi problemi venissero a turbare una serena convivenza che scorreva tranquilla tra compiti, lezioni e cappuccini al bar. Solo di tanto in tanto potevano accendersi delle discussioni in collegio docenti, ma tutto finiva con soluzioni che potevano essere considerate generalmente da tutti condivisibili e non turbative del sistema in vigore.

Un brutto giorno, però, una sottile diatriba di carattere giuridico ruppe bruscamente l'incanto: "Come computare i voti d'astensione?". Una parte dei docenti riteneva che l'astensione dovesse essere considerata come non esistente e, quindi, da non tenersi in considerazione; un'altra frazione del collegio sosteneva che una qualsiasi delibera dei docenti, per essere valida, dovesse raccogliere la maggioranza assoluta dei voti e, di conseguenza, i voti d'astensione dovessero essere sommati ai voti contrari alle proposte. Nel primo caso l'astensione era da considerarsi una generica non volontà deliberativa, nel secondo in ogni caso, un preciso non contributo alla volontà di attivare un'iniziativa.

Nello scontro si profusero le migliori argomentazioni giuridiche, le più raffinate tecniche retoriche che gli avversari bollarono prontamente come sofismi da legulei. Alla fine si decise di passare ai voti. Il Preside propose come prima ipotesi, la delibera: "Le decisioni del Collegio Docenti sono valide se prese a maggioranza assoluta. I voti d'astensione vanno sommati ai voti contrari". Risultato: 70 voti a favore, 50 voti contrari, e 25 astenuti. Problema: se consideriamo la delibera come valida allora è da ritenersi respinta; se la delibera è da ritenersi bocciata, allora prevalendo il punto di vista opposto, la delibera stessa è da considerarsi approvata. Che fare?

* *Presidente della sezione Mathesis di Vicenza*

La disuguaglianza triangolare nello spazio S_n

di Nazario Magnarelli e Marco Mantuano

Ricordiamo anzitutto la disuguaglianza di Cauchy: Dati due gruppi ordinati qualsiasi $(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ di numeri reali o complessi, sussiste la disuguaglianza di Cauchy:

$$\left|\sum_{h=1}^{n} u_h v_h\right|^2 \le \sum_{h=1}^{n} |u_h|^2 \cdot \sum_{h=1}^{n} |v_h|^2 \qquad (1)$$

dove vale il segno = solo se i numeri $u_1,u_2,\dots,u_n$ sono proporzionali ai numeri $\bar{v}_1, \bar{v}_2,\dots, \bar{v}_n$ (si veda la dimostrazione del teorema sul testo di analisi di Ghizzetti).

Il teorema ricordato ci permette di dimostrare la disuguaglianza triangolare nello spazio euclideo a n dimensioni S_n. Cioè, se $A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ e $B(b_1,b_2,\dots,b_n)$ sono due punti di S_n, comunque si prenda in questo spazio un terzo punto $C(c_1,c_2,\dots, c_n)$, sussiste la relazione:

$$\overline{AB} \le \overline{AC} + \overline{CB} \qquad (2)$$

dove si ha il segno = se e solo se il punto C appartiene al segmento AB. Infatti poniamo (3) $c_k - a_k = x_k$, $b_k - c_k = y_k$ e quindi (4) $x_k + y_k = b_k - a_k$ con $k = 1, 2, \dots, n$.

Nel campo dei numeri reali la disuguaglianza di Cauchy si scrive:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \qquad (5)$$

dove vale il segno uguale solo se la n-upla di numeri $(x_1,x_2,\dots, x_n)$ è proporzionale alla n-upla $(y_1,y_2,\dots,y_n)$. Supponendo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ge 0 ,$$

dalla (5) si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right\}^{1/2} \cdot \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{1/2} . \qquad (6)$$

Moltiplicando per 2 ed aggiungendo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

ad ambo i membri si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}\right)^2 \qquad (7)$$

dove vale il segno = solo se le due n-uple di numeri sono proporzionali, come è già stato detto.

Ricordando le (3), (4) possiamo scrivere la (7) come segue:

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - c_k)^2}\right)^2 .$$

Tenendo presente che le tre sommatorie rappresentano il quadrato della distanza (*euclidea*) fra due punti si ha:

$$\overline{AB}^2 \le \left(\overline{AC} + \overline{CB}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \le \overline{AC} + \overline{CB} \qquad (8)$$

dove si ha il segno = solo se y_k è proporzionale a x_k (con $k=1,2,\dots,n$), cioè solo se $y_k = t \cdot x_k$. Ricordando l'ipotesi

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ge 0$$

si ha

$$t\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \ge 0$$

quindi $t \ge 0$. Inoltre, poiché $c_k - a_k = x_k$, $b_k - c_k = y_k$, la relazione $y_k = t \cdot x_k$ fornisce: $b_k - c_k = t \cdot (c_k - a_k) \Rightarrow b_k + t \cdot a_k = c_k \cdot (1+t)$; da cui:

$$c_k = \frac{1}{1+t} b_k + \frac{t}{1+t} a_k \qquad c_k = \frac{1}{1+t} b_k + a_k - \frac{1}{1+t} a_k$$

si ricava:

$$c_k = \frac{1}{1+t}(b_k - a_k) + a_k .$$

Poniamo $(1+t)^{-1} = \lambda$; quindi λ può variare come segue: $0 \le \lambda \le 1$. Si ottiene: $c_k = \lambda(b_k - a_k) + a_k$. Per $t=0$, si ha $\lambda=1$, $c_k=b_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ quindi il punto $C \equiv B$; Per $t=\infty$, si ha $\lambda=0$, $c_k=a_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ quindi il punto $C \equiv A$; Per $0<\lambda<1$, il punto C è interno al segmento AB. Con queste precisazioni la disuguaglianza triangolare (2) è completamente dimostrata.

Qual è il limite del nostro rapporto?

di Ivano Arcangeloni

Qual è il limite del nostro rapporto? Te lo chiedi mai? Siamo una forma calcolabile o indeterminata? E in quest'ultimo caso, di che tipo? Siamo due zeri o due infiniti? O siamo il prodotto di uno zero con un infinito? Ma ha senso poi saperlo? Potremmo derivarci a vicenda, io sopra e tu sotto, esplorare i nostri limiti confrontandoli con quelli di un'altra coppia. Ma se il risultato ci sgomentasse? Se ci vedessimo murati vivi entro le pareti di un valore banale, finito, o addirittura nullo, saremmo poi capaci di oltrepassarlo? No, non si può: un risultato è un risultato, il fatto che lo si conosca o meno non lo cambia di certo. D'altro lato la regola è inequivocabile: se vogliamo superare ogni limite, far tendere all'infinito il nostro rapporto bisogna che uno dei due rinunci a raggiungere l'infinito per sé solo, e, ben più di questo, si adoperi perché l'altro ci arrivi, impetuosamente. Rinunciare a sé per il rapporto, o al rapporto per sé? Non è data alternativa, è la dura legge dei rapporti, l'infallibile Teorema di de l'Hôpital, lo so, eppure è una scelta che non voglio operare. E allora, che fare? Ci ho pensato, sai, ma temo anche il solo parlartene, però, guarda: se tu provassi a capovolgerti, ecco, proprio così, esatto... Capisci? Così tenderemmo all'infinito INSIEME. Sì, ne sono consapevole: sei scomodo, e non è più un rapporto, almeno in senso stretto, ma cos'altro si potrebbe fare per superare limiti?