MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 33 – settembre 2000

Le relazioni di Eulero per i poliedri

Franco Nuzzi *

La nota relazione di Eulero per i poliedri convessi, stabilisce che il numero delle facce F più il numero dei vertici V supera di due il numero degli spigoli S:

V + F = S + 2. (1)

Si osservi come le grandezze in esame non esprimano proprietà metriche degli oggetti ma riguardino piuttosto la topologia delle figure. L'equazione (1) consente di provare che esistono solo cinque solidi regolari (cosiddetti platonici) e tredici solidi archimedei. In generale per controllare l'esistenza di un determinato poliedro si considerano altre due importanti diseguaglianze (note allo stesso Eulero):

2S ≥ 3F (2) e **2S ≥ 3V**. (3)

In questo modo è possibile rispondere a domande del tipo: "esiste un poliedro con 17 vertici e 10 facce?", oppure "un poliedro con 7 spigoli?". Entrambe le domande hanno in questo caso risposta negativa. Infatti per V=17 ed F=10 si ottiene dalla (1) S=25 che però non verifica la (3). Per la seconda domanda S=7 fornisce tramite la (2) F=4 e dalla 3) V=4. Ma allora la (1) darebbe 4+4 = 7+2 il che è falso.

Ci proponiamo ora di visualizzare con un opportuno grafico le condizioni di esistenza di un poliedro. Dalla (1) e la (2) si ha: 2V + 2F = 2S + 4 ≥ 3F + 4 ovvero

V ≥ 1/2 F + 2. (4)

Dalla (1) e la (3) si ha: 2V + 2F = 2S +4 ≥ 3V + 4, ovvero

2F - 4 ≥ V. (5)

Riportando le (4) e (5) in un piano (F,V) otteniamo il grafico mostrato in figura. La regione ombreggiata rappresenta una combinazione di vertici e facce che sono impossibili. Altresì ad ogni crocetta corrisponde almeno un poliedro. Osserviamo dapprima che la retta V=F corrisponde ad una generica piramide. Infatti prendendo come sua base un poligono di n lati avremmo (n+1) facce (n+1) vertici e 2n spigoli il che verifica la prima relazione di Eulero perché: (n+1) + (n+1) = 2n + 2. I poliedri esterni a V=F possono essere ottenuti da queste piramidi *tagliandone* opportunamente una parte o aggiungendone un'altra.

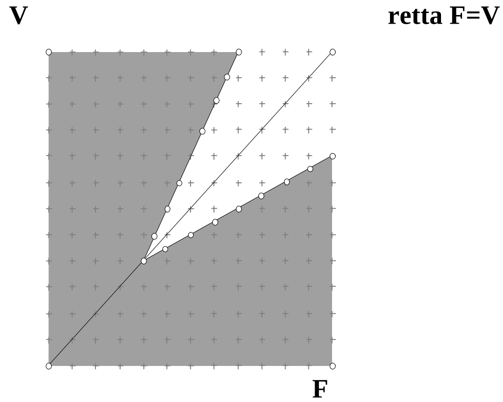
Altre due importanti conseguenze delle relazioni (1) (2) (3) sono: *a)* un poliedro semplice deve contenere almeno una faccia costituita o da 3 o da 4 o da 5 lati; *b)* almeno un vertice tri o tetra o pentavalente. Vediamo la *a)* essendo il procedimento per la *b)* simile. Anzitutto la (1) equivale a 3V +3F = 3S + 6 che con la (3) dà

2S + 3F ≥ 3S + 6 ⇔ 3F - S ≥ 6. (6)

Il numero totale di facce F si può esprimere come: $F = F_3 + F_4 + \ldots + F_n + \ldots$ dove F_3 è il numero di facce triangolari, F_4 quadrangolari etc. Ora poiché ogni F_n avrà n lati, il numero totale di spigoli (contati due volte) sarà:

$2S = 3F_3 + 4F_4 + \ldots. + nF_n$. (7)

Questa con la (6) dà: $6 (F_3 + F_4 + \ldots F_n) - (3F_3 + 4F_n + \ldots nF_n) \geq 12$ ovvero $3F_3 + 2F_2 + F_5 - F_7 \ldots (n-6)F_n \geq 12$. Poiché il termine sinistro deve essere positivo almeno uno di F_3 F_4 F_5 dovrà essere diverso da zero. Ma allora in un poliedro avremo almeno una faccia a tre, a quattro o a cinque lati.



Concludiamo osservando che la (1) può essere generalizzata nell'ambito della *teoria dei grafi* introducendo il concetto di caratteristica χ di una figura ***f*** suddivisa opportunamente in facce, vertici e spigoli: ad esempio in un piano abbiamo χ(***f***) = V - S + F = 1, mentre su una retta χ(***f***) = V - S = -1.

Bibliografia Y.A. Shashkin,The Euler Characteristic, Mir, 1989.

** Socio Mathesis – Docente presso il Liceo Q. O. Flacco di Bari*

Un integrale notevole

di Mantuano Marco **

Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad , \quad n \in N, \quad n > 1..$$

Per calcolare tale integrale utilizziamo il *teorema dei residui*: sostituiamo quindi la variabile reale *x* con la variabile complessa *z* e, come cammino di integrazione, consideriamo un cammino *Γ* che verrà precisato più avanti. Consideriamo quindi l'integrale:

$$\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^n} \quad , \quad n \in N \ , \quad n > 1.$$

La funzione integranda $f(z)=1/(1+z^n)$ ha poli semplici negli *n* valori z_k di *z* che annullano il denominatore:

$1+z^n = 0 \quad \Rightarrow \quad z^n = -1 = e^{i\pi}$

$z_k = Exp[i\cdot(\pi+2k\pi)/n]$, $n \in \mathbf{N}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Ciò ci consiglia di scegliere il cammino di integrazione *Γ* in modo da contenere solo uno dei poli della funzione integranda e in particolare quello corrispondente a *k=0* ovvero $z_0 = Exp[i\cdot(\pi/n)]$. Sia quindi *Γ* il contorno chiuso del campo complesso formato dal segmento dell'asse reale che va da *z=x=0* a *z=x=R*, dall'arco di circonferenza di raggio *R* e centro *z=0* da z=x=R a $z=R\cdot Exp[i\cdot(2\pi/n)]$ e dal segmento appartenente alla retta di equazione $\theta=2\pi/n$ da $z=R\cdot Exp[i\cdot(2\pi/n)]$ a *z=0*. Nella regione semplicemente connessa *S* interna a *Γ* si trova quindi il solo polo semplice ovvero $z_0=Exp[i\cdot(\pi/n)]$ con residuo:

$$RES\left(\frac{1}{1+z^n};z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\cdot\frac{1}{1+z^n}\right]=$$

Utilizzando l'Hospital

$$\lim_{z\to z_0}\left(n\cdot z^{n-1}\right)^{-1}=\left(n\cdot z_0^{\,n-1}\right)^{-1}=\left[n\cdot\exp\left(i\cdot\frac{\pi(n-1)}{n}\right)\right]^{-1}.$$

Utilizzando il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^n}=\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}+\int_0^{2\pi}\frac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{1+R^ne^{in\theta}}+$$

$$+\int_R^0\frac{\exp(i\cdot 2\pi/n)}{1+r^n}dr=2\pi\cdot i\cdot RES\left(\frac{1}{1+z^n};z_0\right)=$$

$$=\frac{2\pi i}{n\cdot\exp(i\cdot\pi((n-1)/n))}\ .$$

Dove si è posto nel I integrale a II membro $z=x$, $dz=dx$, perché l'integrazione va effettuata su di un segmento di asse reale, nel II $z=R\cdot exp(i\theta)$, $dz=iR\cdot exp(i\theta)\cdot d\theta$, perché l'integrazione va effettuata sulla circonferenza di raggio R e centro O, nel III $z=r\cdot exp(i\cdot 2\pi/n)$, $dz=exp(i\cdot 2\pi/n)\cdot dr$, perché l'integrazione va effettuata sulla retta $\theta=2\pi/n$. Consideriamo ora il II integrale:

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{1+R^ne^{in\theta}}\right|=\int_0^{2\pi}\left|\frac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{1+R^ne^{in\theta}}\right|=\int_0^{2\pi}\frac{\left|iR\cdot e^{i\theta}\right|d\theta}{\left|1+R^ne^{in\theta}\right|}<$$

$$<\int_0^{2\pi}\frac{R\,d\theta}{R^n}=\frac{2\pi}{nR^{n-1}}\ .$$

Perché se $0\le\theta\le 2\pi/n$, $n>1\Rightarrow|1+R^ne^{i\theta}|>R^n>0$ e $\forall\theta\in[0;2\pi[$ $\Rightarrow|e^{i\theta}|=1$.. Allora per $n>1$::

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{1+R^ne^{in\theta}}=\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\frac{i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\ d\theta}{1+R^ne^{in\theta}}\right|\le$$

$$\le\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi}{nR^{n-1}}=0.$$

E quindi:

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^n}=$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}+\int_0^{2\pi}\frac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{1+R^ne^{in\theta}}+\int_R^0\frac{\exp(i\cdot 2\pi/n)}{1+r^n}dr\right]=$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}-(\exp(i\cdot 2\pi/n))\cdot\int_0^R\frac{dr}{1+r^n}\right]=$$

Cambiando notazione e mettendo in evidenza:

$$=[1-\exp(i\cdot 2\pi/n)]\cdot\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(1+x^n\right)^{-1}\cdot dx=$$

$$[1-\exp(i\cdot 2\pi/n)]\cdot\int_0^{+\infty}\left(1+x^n\right)^{-1}dx=$$

$$=2\pi\cdot i\cdot(n\cdot\exp(i\cdot\pi(n-1)/n))^{-1}$$

ovvero

$$\int_0^\infty\left(1+x^n\right)^{-1}\cdot dx=$$

$$=2\pi\cdot i\cdot[n\cdot\exp(i\cdot\pi(n-1)/n)\cdot(1-\exp(i\cdot 2\pi/n))]^{-1}=$$

$$=\frac{\pi/n}{\mathrm{sen}(\pi/n)}.$$

*** docente presso il Liceo scientifico "Majorana" di Latina*

Sapere tutto di poco equivale a sapere poco di tutto?

Sul metodo scientifico

di Luciano Corso

Il metodo scientifico si basa su due criteri fondamentali: il criterio ipotetico-deduttivo e il criterio sperimentale.

Il primo di questi criteri corrisponde all'idea che sia sempre possibile, a partire da certi principi accettati per convenzione (postulati o assiomi), costruire una sequenza di ragionamenti, espressi da enunciati, in grado di valutare la validità contenuta in un enunciato finale. In base a questa idea si può sempre dire se un enunciato è vero o falso, senza contraddizione nell'ambito del sistema logico di riferimento.

Il secondo criterio fa riferimento al metodo sperimentale. In base ad esso le tesi riguardanti i fenomeni sperimentali devono essere confermate dalla riproducibilità di un esperimento a piacere che convalidi sempre la tesi sostenuta (oggettività del risultato scientifico nel senso di Galilei [si veda MatematicaMente n. 1]), e da assenza di controprove che portino a tesi contrarie a quelle raggiunte per via diretta (falsificazione nel senso di Popper [si veda MatematicaMente n. 3]). Inoltre, poiché l'esperimento genera dati che non presentano quasi mai regolarità deterministiche, attraverso l'analisi dei dati, con un processo induttivo di tipo inferenziale, si colgono le eventuali regolarità che governano il fenomeno che stiamo osservando, per cui è possibile generalizzare i risultati trovati.

La scienza è fortemente segnata anche dal pensiero di Charles Darwin. Conviene ribadire alcuni passaggi della sua elaborazione scientifica e filosofica. 1) Il metodo scientifico deve considerare anche l'aspetto storico dei fenomeni naturali (storicizzazione): sotto questo aspetto, si cerca di spiegare eventi e processi che hanno già avuto luogo e che non sono propriamente riproducibili in laboratorio. Il dato sperimentale, in questo caso, è unico e non ripetibile. Si cercano così gli anelli mancanti di una interpretazione provvisoria dei fatti osservati, tentando di far quadrare le teorie per approssimazioni successive in quanto i fenomeni naturali seguono processi evolutivi tali da impedire di pensare che ciò che è valido oggi, come chiave interpretativa delle leggi di natura, lo possa essere anche domani. 2) È fondamentale l'importanza del caso come selettore di regole valide per il futuro, caso che non viene più considerato come determinato da una carenza di informazioni sullo stato di natura, ma come serie di fattori accidentali incontrollabili ed imprevedibili che intervengono quando uno meno se lo aspetta e modificano in modo definitivo lo stato delle cose, indipendentemente dall'uomo e dal suo stato di conoscenza. 3) Abbandono del finalismo. Non appare in natura un fine alla dinamica del mondo, alle sue leggi.

Bibliografia: [B.1] Storia Naturale ed Evoluzione, a cura di P. Omodeo, autori vari, Letture da LE SCIENZE (Scientifc American), Milano, 1979 ; [B.2] L'influenza di Darwin sul pensiero moderno, di Ernst Mayer, LE SCIENZE, n.385 settembre 2000, Milano; [B.3] Viaggio di un naturalista intorno al mondo, di Charles Darwin, A. Martello editore, Milano, 1959; [B.4] Congetture e confutazioni, K. R. Popper, Il Mulino, Bologna, 1972; [B.5] Teoria della conoscenza, di B. Russell, ed. Newton & Compton, 1996, Roma; [B.6] Analiticità, significanza, induzione, di R. Carnap, Il Mulino, Bologna, 1971; [B.7] Fondamenti della Matematica, di W. S. Hatcher, Boringhieri, Torino, 1978; [B.8] Statistica, Marcello Boldrini, ed. Giuffrè, 1972, Milano

Ai soci!

(e a coloro che vogliono diventarlo)

È aperta l'iscrizione alla MATHESIS per il 2001, primo anno del terzo millennio. Invia un assegno o un vaglia postale di 50.000 lire intestato a Mathesis VR c/o Luciano Corso – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona, specificando bene nome, cognome e indirizzo con cap e ragione del versamento. Oltre a sostenere l'associazione, potrai essere informato sulle iniziative e sulle manifestazioni culturali che l'associazione farà. Riceverai il Periodico di Matematiche – prestigiosa rivista scientifica e culturale nazionale – e MatematicaMente (periodico mensile). Puoi fare il versamento anche sul conto corrente bancario della sezione intestato a: Corso Luciano c/o Mathesis Verona – coordinate bancarie: K – 05188 – 11715 – 5547.