MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 34 – ottobre 2000

Il mio albero frattale

di Arnaldo Vicentini *

L'alberello che sta nella testata è un disegno fatto pixel per pixel dal mio vecchio Macintosh SE con un programma (in TurboPascal 1.1 per Macintosh) scritto da me nel '92. Si tratta d'un disegno frattale ottenuto per unione di trasformazioni affini partendo da una figura elementare. Fiducioso che il miscuglio di matematica ed informatica di cui si è nutrito il mio alberello (logo di testata e figura qui di seguito) possa essere utile nella didattica di tali discipline, vi dico come ho fatto.

Nel Macintosh SE (in bianco e nero), le coordinate x (da sinistra a destra) ed y (dall'alto in basso) d'un pixel sottostanno alle condizioni $-9 \le x \le 489$ e $-9 \le y \le 284$. Sullo schermo ho considerato un rettangolo di 480×272 pixel (con il vertice in alto a sinistra di coordinate x_0=0 e y_0=0) suddiviso in 120×68 = 8160 quadratini da 4×4 pixel. In tal modo le informazioni di un *array*[0..479, 0..271] di *boolean* – sufficiente a codificare qualsiasi disegno in bianco e nero sul rettangolo-schermo – si possono condensare in un *array*[0..8159] di *integer* (ossia interi di sedici cifre binarie). Basta infatti porre in corrispondenza biunivoca il pixel m del quadratino n (con m tra 0 e 15 ed n tra 0 e 8159) con le coordinate x ed y del pixel stesso e convenire che se il pixel è nero la cifra binaria m dell'elemento n dell'*array* valga 1. La corrispondenza è data dalle seguenti equazioni:

n=120∗(y div 4)+ (x div 4); x=m mod 4 + 4*(n mod 120;
m=4*(y mod 4)+(x mod 4). y= m div 4 + 4*(n div 120).

Detto A un *array*[0..8159] di *integer*, – che diciamo di tipo MAP –, possiamo ricordare se il pixel (x,y) è nero o bianco ponendo 1 o 0 la cifra binaria numero m di A[n].

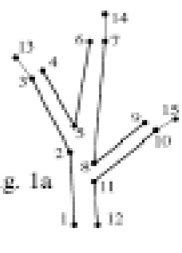


Fig. 1a

Fig. 1b

Ho quindi disegnato su carta millimetrata il tronco d'albero riprodotto in Fig. 1a (di cui occorre ignorare i segmenti 3-13, 7-14 e 10-15). Questo è identificato dai dodici punti numerati da 1 a 12. Il tronco ha tre ramificazioni interrotte. Immaginiamo di prolungarle con tre rispettive riduzioni distorte del tronco stesso (ottenute con una precisa legge di trasformazione) come in Fig. 1b. Allora le ramificazioni diventano 9, e su ciascuna di esse si può aggiungere un'opportuna riduzione distorta dell'intero disegno… e continuare così fino che le aggiunte da fare, sempre più piccole, non si riducono sotto le dimensioni di un pixel. La legge usata per fabbricare le parti da aggiungere, in modo che un po' alla volta il tronco divenga un albero, è la trasformazione affine. Analiticamente una affinità è espressa da una sostituzione lineare delle coordinate cartesiane: e perciò definita da 6 parametri come nelle formule seguenti che trasformano il punto P nel punto Q:

$$\begin{cases} x_Q = a \cdot x_P + b \cdot y_P + h \\ y_Q = c \cdot x_P + d \cdot y_P + k. \end{cases}$$

Ho poi fatto calcolare al computer i parametri a, b, c, d, h e k di tre affinità che facciano le dette aggiunte al disegno scegliendo a sentimento i punti 13, 14 e 15 e imponendo alla prima affinità di trasformare 1 in 4, 12 in 3 e 11 in 13; alla seconda di trasformare 1 in 6, 12 in 7 e 11 in 14; alla terza di trasformare 1 in 9, 12 in 10 e 11 in 15. Per maggiore chiarezza ecco i due sistemi lineari per il calcolo dei parametri della prima affinità, uno nelle incognite (a_1, b_1, h_1), l'altro nelle incognite (c_1, d_1, k_1):

$x_1a_1+y_1b_1+h_1 = x_4$;	$x_1c_1+y_1d_1+k_1 = y_4$;
$x_{12}a_1+y_{12}b_1+h_1 = x_3$;	$x_{12}c_1+y_{12}d_1+k_1 = y_3$;
$x_{11}a_1+y_{11}b_1+h_1 = x_{13}$;	$x_{11}c_1+y_{11}d_1+k_1 = y_{13}$

Affinché il gioco funzioni, occorre che ogni affinità trasformi il disegno in uno minore. Le nostre affinità sono calcolate in modo da trasformare il triangolo (1,12,11) rispettivamente nei triangoli (4,3,13), (6,7,14) e (9,10,15): tutti minori del triangolo (1,12,11) di partenza.

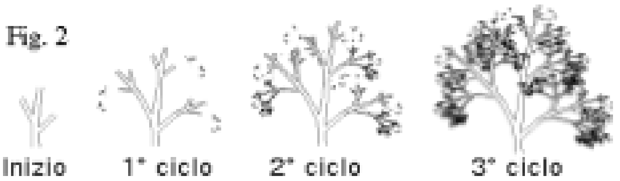
Inizializzata la *mappa* del disegno, azzerato cioè ogni elemento dell'*array* A, inseriamo nella mappa la figura di partenza, ossia i punti degli 8 segmenti 1-2, 2-3, 4-5, 5-6, 7-8, 8-9, 10-11 e 11-12. I punti d'un segmento, trattandosi di pixel, sono in numero finito. Per individuare quelli che appartengono ad un segmento inclinato meno di 45 gradi, se ne considerano le ascisse intere e se ne calcolano le ordinate arrotondandole all'intero più prossimo. Similmente per un segmento inclinato più di 45 gradi scambiando ascisse con ordinate. Ecco un chiarificatore frammento di programma che colloca nella mappa i punti del segmento 11-10 di Fig. 1b. [NB: PUT(x,y:integer, var A:map) è la procedura che pone 1 quel bit di quell'elemento di A che corrisponde al pixel di coordinate x e y].

```
m:=(y10-y11)/(x10-x11);
for x:=x11 to x10 do PUT(x,round(y11+m*(x-x11)),A);
```

Per disegnare l'albero non ci resta che implementare l'algoritmo che arricchisce la mappa di nuovi punti e ripeterne l'applicazione a piacere. Ecco l'algoritmo:

a) Scandire gli elementi di A e le 16 cifre binarie di ognuno.
b) Per ogni "1" trovato, decodificarne la posizione (m,n) in A in quella (x,y) di un pixel, trasformarla in altre tre mediante le tre affinità, arrotondare le coordinate dei nuovi punti, aggiornare A con questi ed annerire i corrispondenti pixel.

La Fig. 2 mostra come cresce l'albero nei primi tre cicli di applicazione di questo algoritmo.



Affinché possiate *clonare* esattamente il mio alberello non mi resta che precisarvi le coordinate dei 15 punti iniziali:

1(239,271);	**2**(237,231);	**3**(217,191);	**4**(223,187);
5(239,217);	**6**(247,171);	**7**(255,171);	**8**(249,237);
9(275,215);	**10**(281,219);	**11**(249,247);	**12**(251,271);
13(209,179);	**14**(255,155);	**15**(291,213).	

Bibliografia: Consigliamo i seguenti testi: Michael Barnsley, *Fractal Everywhere*, Academic Press, Inc., 1988, London; H. O. Peitgen and P. H. Richter, *La Bellezza dei Frattali*, Bollati Boringhieri, 1987, Torino

** Socio di Mathesis – VERONA*

Atomi, insiemi e classi proprie

di Ruggero Ferro **

Abbiamo visto [*MatematicaMente* n. 17 e n. 18] che le classi sono costituite da elementi, cioè quello che può appartenere ad una classe è un elemento. Inoltre certe classi, che abbiamo chiamato insiemi, sono anche elementi e quindi possono appartenere ad altre classi (il torneo ha come elementi le squadre che sono insiemi): ci sono cioè classi di insiemi (classi i cui elementi sono insiemi) i quali a loro volta possono avere alcuni elementi che sono insiemi e così via. Ma non tutte le classi sono elementi, insiemi, ci sono anche le classi proprie. E gli elementi sono tutti classi? No, ci sono elementi che non sono classi: eccone alcuni esempi. La persona che sta leggendo queste note è un qualcosa, un elemento, ma non un insieme, non è l'operazione mentale astratta di considerare alcune cose, la persona è un individuo ben concreto; d'altra parte chi sarebbero i suoi elementi? Non le molecole delle cellule che la costituiscono: per avere una persona non bastano questi elementi fisici, ma essi devono essere ben organizzati in un modo ben preciso che non è còlto dalla nozione di classe. Invece quella persona può essere elemento di una classe, ad esempio, della classe dei lettori di questi note.

Come altro esempio si consideri la bontà: non ha elementi, non è una classe, ma può essere elemento, ad esempio, della classe delle virtù. Ancora, si consideri il numero naturale 2. Esso non ha elementi, non è una classe, ma può appartenere a molte classi, ad esempio alla classe dei multipli di due minori di 25.

Chiameremo **atomi** gli elementi che non sono classi, e che quindi non hanno elementi. Si noti che sono diversi dalla classe vuota. Anche se pure questa non ha elementi, poiché è solo per le classi che vale il criterio di uguaglianza: due classi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Gli atomi invece si distinguono tra loro per essere una cosa piuttosto che un'altra.

Abbiamo così incontrato insiemi, classi proprie ed atomi. Si noti che 1) niente può appartenere ad un atomo, ma un atomo può appartenere sia ad un insieme che ad una classe propria; 2) solo o insiemi o atomi possono appartenere ad insiemi, e questi possono appartenere sia ad insiemi che a classi proprie (però un insieme non può appartenere a se stesso, per la fondatezza, ma eventualmente ad un altro opportuno); 3) solo o atomi o insiemi possono appartenere a classi proprie, ma queste non possono appartenere ad alcunché. Detto altrimenti, se $a \in b$ allora a può essere o un atomo o un insieme, non una classe propria; mentre b può essere un insieme o una classe propria ma non un atomo; comunque deve essere $a \neq b$.

In molte esposizioni non si considerano gli atomi sostituendoli con particolari insiemi scelti in modo che abbiano lo stesso comportamento degli atomi che sostituiscono. Ad esempio, al posto del numero 2 si considera l'insieme $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, che è un insieme costituito da due particolari elementi, e che, in un certo contesto, ha un comportamento come il numero 2 e può essere utilizzato al posto di questo. Poiché – come già osservato – alla matematica (e non solo alla matematica) non interessa la natura specifica degli elementi, ma il loro comportamento, se i particolari insiemi che vengono considerati al posto degli atomi hanno lo stesso comportamento di questi, la sostituzione è accettabile.

*** Ordinario di Logica Matematica nel corso di Informatica della Facoltà di Scienze MM. FF. NN. dell'Università degli Studi di Verona*

L'eleganza degli operatori in fisica : il rotore

di Paolo Di Sia

(*Notazione adottata*: i vettori sono indicati con una freccia posta sopra la lettera utilizzata o in grassetto; per gli scalari si considera semplicemente la lettera oppure il vettore in modulo. il prodotto vettoriale viene indicato con la croce, il prodotto scalare con il punto).

Dato un campo vettoriale **a**, si definisce *rotore* di **a** il vettore:

$$\vec{b} = rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Utilizzando il vettore simbolico "del" si avrà:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = rot\vec{a}$$

L'operazione in questione permette di passare da un campo vettoriale ad un altro campo vettoriale.

Per il rotore sussiste il *teorema di Stokes*: presi un qualunque contorno C e una qualunque superficie Σ che si appoggi su C (entrambi completamente contenuti nel dominio del campo vettoriale **a**), la circuitazione di **a** lungo C è uguale al flusso del rotore di **a** attraverso Σ:

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_\Sigma rot\vec{a} \cdot d\vec{\Sigma} = \Phi_\Sigma(rot\vec{a})$$

Si ricorda che la *circuitazione* di un campo vettoriale è definita come la componente tangenziale media del vettore moltiplicata per il perimetro della curva chiusa.

Un campo vettoriale il cui rotore sia identicamente nullo si dice *irrotazionale*.

Il rotore è uno strumento matematico efficace in questioni di fisica teorica; ad esempio in idrodinamica dei moti vorticosi o, ancor più, in teoria del campo elettromagnetico.

Il fisico scozzese James Clerk Maxwell descrisse il campo elettromagnetico attraverso un insieme di equazioni che legano indissolubilmente l'elettricità con il magnetismo ed oltre ai fenomeni elettromagnetici spiegano anche quelli ottici. esse mettono in profonda relazione lo spazio con il tempo collegando la variazione nel tempo di un campo con la variazione spaziale dell'altro. Riportiamo le equazioni, elegantemente scritte con gli operatori visti:

$$div\vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad ; \quad rot\vec{E} = -\partial\vec{B} / \partial t$$

$$div\vec{B} = 0 \quad ; \quad rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + (\mu_0 \cdot \varepsilon_0) \cdot \left(\partial\vec{E} / \partial t\right)$$