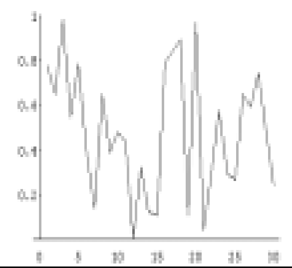
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 35 – novembre 2000



Successioni definite per ricorrenza

di Luigi Marigo

[2ª parte, segue dal n. 21] **1.** Per sviluppare proficuamente l'argomento iniziato al numero 21 è necessaria al lettore la nozione di orbita: dati una legge $a_{n+1}= f(a_n)$ e un valore iniziale a_1, si dice ***orbita*** di a_1, generata dalla legge $a_{n+1}= f(a_n)$ la successione $\{ a_1, a_2= f(a_1), a_3= f(a_2), \dots\}$. È opportuna una classificazione delle orbite, e poiché la casistica è assai vasta, mi limito ad alcuni casi fondamentali:

a) Sia $a= f(a)$ un punto fisso proprio: esso è detto ***attrattore*** se esiste un intorno I di a tale che $\forall a_1\in I$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a;$$

l'insieme di tali a_1 è detto ***bacino di attrazione di** a*.

b) Sia ancora $a= f(a)$ un punto fisso proprio: esso è detto ***repulsore*** se esiste un intorno I di a tale che $\forall a_1\in I$ con $a_1\neq a$ l'orbita esce definitivamente da tale intorno: non si possono fare previsioni in generale sull'eventuale limite della successione.

c) Sia sempre $a= f(a)$ un punto fisso proprio, attrattore o repulsore; è evidente che se è $a_1= a$, allora è $a_n= a\ \forall n$ e l'orbita è la successione costante $\{a, a, \dots\}$.

d) Sia infine ∞ un punto fisso improprio: è allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Un semplice esempio coinvolge tutti i casi considerati: $a_{n+1}= a_n^2$. L'equazione dei punti fissi, $a= a^2$, ha soluzioni proprie $a= 0$ e $a= 1$, soluzione impropria $a= \infty$; l'iterazione grafica porta facilmente a concludere che: $\forall a_1\in (-1;1)$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0;$$

$\forall a_1\in (-\infty;-1)\cup (+1;+\infty)$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty;$$

$a_1= -1\Rightarrow\forall n \mid (n\in \boldsymbol{N} \wedge n>1)\ a_n=1$, e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Ovviamente, per $a_1=1$ oppure $a_1= 0$ si hanno le successioni costanti $\{1, 1, \dots\}$ o $\{0, 0, \dots\}$ rispettivamente.

e) Se l'equazione dei punti fissi non ha soluzioni reali, la successione può essere ***ciclica*** di periodo r, (r = 2, 3, …), se è $a_{n+r}= a_n$ per ogni n. Vi sono orbite associate a certe funzioni non continue, per le quali vi è una sequenza di valori qualsiasi fino a un n_0 dopo del quale comincia un ciclo. Notevole esempio è la successione con $a_1\in \boldsymbol{N}$ e legge di ricorrenza seguente:"Se a_n è pari allora $a_{n+r}= a_n/2$ altrimenti $a_{n+r}= 3a_n+1$". Essa cade nel ciclo [4, 2, 1] (congettura di Collatz).

f) Sempre in assenza di punti fissi reali una successione può presentare un andamento ***caotico*** quando la sequenza dei valori a_n ha l'apparenza di una successione casuale; un esempio è la successione $a_{n+r}=1-4/a_n$

2. È interessante confrontare la casistica esposta con il noto *criterio di Cauchy*: "Una successione converge se e solo se $\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 \mid \forall h,k > n_0 \mid a_k - a_h \mid < \varepsilon$ ".

Particolarizzando $h= n$, $k=n+1$ si perde il carattere di sufficienza ma non quello di necessità, per cui resta necessaria la condizione $|a_{n+1} - a_n|<\varepsilon$, ovvero $|f(a_n) - a_n|<\varepsilon$. Si danno vari casi: se la disequazione non ammette soluzioni, la successione non ammette limite finito in accordo col fatto che l'equazione $f(a)=a$ non può avere soluzioni reali. Se vi sono punti fissi a, per ognuno di essi è $f(a) - a = 0$ e la disequazione è soddisfatta $\forall n\in \boldsymbol{N}$ per le successioni costanti $\{a, a, \dots\}$; se a_1 appartiene al bacino di attrazione di a ma è $a_1\neq a$, allora la disequazione è verificata in un opportuno intorno di a (e il lettore può verificarlo, ad esempio, per la successione $a_{n+1} = a_n^2$). Ma qui sorge una questione: il criterio di Cauchy non permette di distinguere gli attrattori dai repulsori, cosa non sempre facile. A questo proposito è noto un criterio discriminatore fondato sulle derivate, applicabile quando la funzione $y= f(x)$ associata alla legge di ricorrenza $a_{n+1}= f(a_n)$ è derivabile. Si danno questi casi:

- se è $f'(a)> 1$ oppure $f'(a)<-1$ allora $a= f(a)$ è un repulsore;
- se è $-1 < f'(a) < 1$ allora $a= f(a)$ è un attrattore;
- se infine è $f'(a)= +1$ o $f'(a)= -1$ non si possono fare previsioni in generale e diventano influenti anche le derivate di ordine superiore, ma anche in questo caso si possono avere sorprese. Con $f'(a)= -1$ e $f''(a)\neq 0$ si ha in generale un attrattore, ma se la funzione associata $y = f(x)$ è invariante rispetto allo scambio tra y e x si ha solo la successione costante $\{a, a, \dots\}$ oppure una successione ciclica di periodo 2, in virtù della simmetria del grafico rispetto alla bisettrice.

Può essere ancora utile l'osservazione seguente:

Se l'equazione $a_{n+1}= f(a_n)$ è invertibile, è definibile la successione $a_{n+1}= f^{-1}(a_n)$: i punti fissi sono invarianti, ma attrattori e repulsori si scambiano per cui, individuando per iterazione grafica o numerica gli attrattori della successione inversa si individuano i repulsori della successione in esame.

Ad esempio, le successioni $a_{n+1}= \sqrt{(a_n)}$ e $a_{n+1}= a_n^2$ hanno gli stessi punti fissi: ma (0, 0) è attrattore per $a_{n+1}= a_n^2$ e repulsore per $a_{n+1}= \sqrt{(a_n)}$, mentre (1,1) è attrattore per $a_{n+1}= \sqrt{(a_n)}$ e repulsore per $a_{n+1}= a_n^2$.

Sui problemi della divulgazione matematica

di Carlo Veronesi *

Sul numero 19 di *MatematicaMente* il direttore Luciano Corso solleva il problema della divulgazione, richiamando la necessità di una più larga diffusione della cultura scientifica nella società e nella scuola. Il problema della divulgazione si intreccia naturalmente con l'annosa questione delle «due culture», umanistica e scientifica, e della loro difficile interazione. Usualmente si dice che la cultura scientifica è cosi poco diffusa nel nostro paese per il retaggio della filosofia neoidealistica (secondo cui la scienza sarebbe una produzione umana priva di autentico valore conoscitivo) e anche per la riforma gentiliana della scuola, che ancor oggi fa sentire i suoi effetti. Alla matematica, in particolare, viene attribuita la palma della impopolarità proprio a causa dei cattivi ricordi di scuola. Perciò si rivolgono raccomandazioni agli insegnanti perché non insistano nel proporre ai propri allievi catene di esercizi meccanici, ma invece si sforzino di presentare i concetti matematici nella loro evoluzione storica e nel loro significato filosofico, mettendone anche in luce le possibili connessioni interdisciplinari. Perché cambi l'immagine della matematica presso il grande pubblico, si suggerisce intanto di cambiare lo stile con cui si insegna nelle scuole. Tuttavia si ha l'impressione che i problemi della divulgazione non dipendano solo dalla qualità dell'insegnamento secondario. Se è vero che gli insegnanti di matematica e di materie scientifiche devono cercare di rivalutare la dimensione culturale delle loro discipline, è anche vero che esiste un pubblico di non specialisti, di persone con una formazione letteraria o filosofica, che manifestano interesse per la scienza e richiederebbero di essere informati in modo comprensibile su argomenti dell'attualità scientifica. Il compito della divulgazione sarebbe di rispondere a questa esigenza, ma per la matematica, come vedremo citando alcune testimonianze autorevoli, le difficoltà sembrano maggiori che per le altre scienze.

Per quanto riguarda la presenza della matematica sulla stampa non specializzata, Giovanni Caprara, giornalista scientifico del Corriere della Sera, riferisce che presentare articoli di contenuto matematico sulle pagine scientifiche dei quotidiani è impresa molto ardua. Spesso è necessario parlare dei personaggi, dei matematici anziché della matematica, oppure occorre far riferimento alle applicazioni; è rarissimo che si pubblichino pezzi su contenuti astratti della materia. Ma Caprara lamenta anche il fatto che, mentre per tutte le altre scienze esistono delle persone interessate a raccontare ciò che accade, per la matematica nessuno affaccia mai proposte. I sacerdoti delle formule vengono perciò invitati ad uscire dai loro circoli e a tentare (dimenticando le formule) qualche racconto anche per i cosiddetti profani [B1, pp. 116-117].

A sua volta Umberto Bottazzini, membro della Commissione Scientifica dell'UMI, conferma che all'interno della comunità dei matematici. sono pochi coloro che si impegnano in attività di tipo divulgativo, forse nella convinzione che sia impresa difficile o impossibile se non si ricorre al linguaggio proprio della disciplina. Solo recentemente - aggiunge - si sono avuti segnali di una certa inversione di tendenza, probabilmente dovuti alla preoccupazione per il drammatico calo di studenti nei corsi di laurea in matematica [B2, p. 46]. Questo orientamento delle nuove generazioni, che, nella migliore delle ipotesi, concepiscono la matematica solo come materia di servizio per gli studi di ingegneria, non può lasciare indifferenti nemmeno gli insegnanti secondari. Dopo le celebrazioni dell'anno mondiale, è malinconico pensare alla prospettiva che la matematica diventi il latino del terzo millennio, cioè una lingua morta tramandata da pochi puristi isolati, sommersa dal dilagare dei linguaggi «volgari» utilizzati dai tecnici e dagli informatici. Per tutti coloro che, a qualsiasi livello, hanno intrapreso la professione della matematica urge pensare a una strategia di sopravvivenza.

Bibliografia: [B1] G. Caprara - G. Lolli: *Matematica e divulgazione: due opinioni a confronto*, "Archimede", 3/1999; [B2] U. Bottazzini: *Divulgare la matematica in un giornale?*, Atti del convegno Matematica e cultura 2, Venezia 1998, supplemento a " Lettera matematica Pristem", n.° 30.

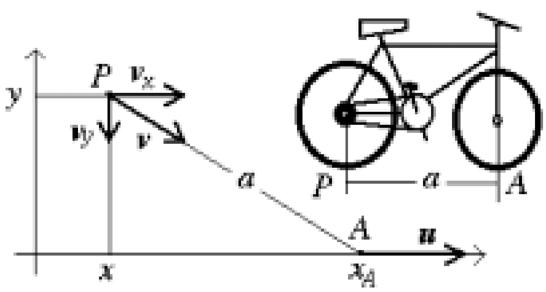
** Socio Mathesis di Rodigo (MN), docente di Mantova*

Un *quiz* di cinematica

di Arnaldo Vicentini

Una persona a piedi conduce una bici per il manubrio inizialmente girato e fa percorrere alla ruota anteriore un tragitto rettilineo a velocità costante. Determinare la traiettoria del punto di appoggio della ruota posteriore supponendo che la distanza tra i punti di appoggio delle ruote resti costante, (ciò che sarebbe vero esattamente se la forcella anteriore fosse diritta e verticale).

Fig. 1



Soluzione del "quiz"

Diciamo: A il punto di appoggio della ruota anteriore di ascissa x_A e ordinata nulla, P quello della posteriore di ascissa x e ordinata y, a la distanza costante tra A e P, $\boldsymbol{u}$ la velocità costante di A, $\boldsymbol{v}$ (di componenti v_x e v_y e modulo v) la velocità di P e t il tempo[Fig. 1]. Abbiamo allora:

$$x_A = ut;\; x_A - x = (a^2 - y^2)^{1/2} = ut - x; \tag{1}$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{(a^2 - y^2)^{1/2}}; \tag{2}$$

Posta la (2) nella forma:

$$\frac{dx}{dy} = -[(a/y)^2 - 1]^{1/2}, \tag{3}$$

una primitiva x=$f(y)$ della funzione a secondo membro della (3) si ottiene integrando per sostituzione con la posizione:

$$y = \frac{a}{\cosh(z)} \Rightarrow \begin{cases} -[(a/y)^2 - 1]^{1/2} = -\sinh(z); \\ dy = -a\dfrac{\sinh(z)}{\cosh^2(z)}dz. \end{cases} \tag{4}$$

Allora, infatti, la funzione integranda diventa:

$$\frac{dx}{dz} = a[1 - \frac{1}{\cosh^2(z)}] = a\frac{d}{dz}[z - \tanh(z)]. \tag{5}$$

Detta c una costante arbitraria e ricordando l'identità:

$$z = \ln[\cosh(z)+\sinh(z)], \tag{6}$$

la soluzione generale della (3) risulta in definitiva:

$$x = a\ln\left[\frac{a + (a^2 - y^2)^{1/2}}{y}\right] - (a^2 - y^2)^{1/2} + c. \tag{7}$$

Non è restrittivo pensare inizialmente il manubrio girato di 90 gradi, cioè che per t= 0 sia x= 0 e y= a, e quindi c= 0.

La (3) mostra che x=$f(y)$ è monotona e perciò invertibile; ma la (7) mostra che la funzione inversa non è esprimibile tramite funzioni elementari. È facile, però, avere le equazioni parametriche delle coordinate x e y dei punti della curva-traiettoria di P (rappresentata in Fig. 2) in funzione del tempo t; e quindi le loro derivate v_x e v_y ed infine la velocità v. Ricordando la (1), dalla (7) si ha infatti:

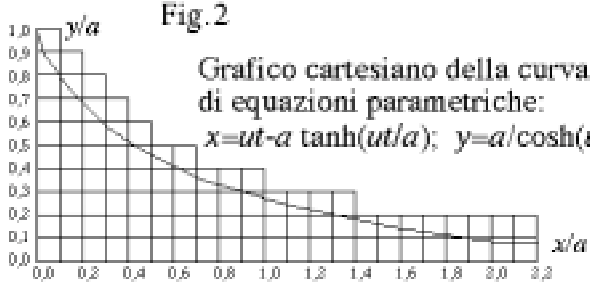
$$ut = a\ln\left[\frac{a + (a^2 - y^2)^{1/2}}{y}\right] \Rightarrow y = \frac{a}{\cosh(ut/a)}; \tag{8}$$

$$x = ut - a\tanh(ut/a);\quad v_x = u\tanh^2(ut/a); \tag{9}$$

$$y = \frac{a}{\cosh(ut/a)};\qquad v_y = -u\frac{\tanh(ut/a)}{\cosh(ut/a)}; \tag{10}$$

$$v = (v_x{}^2 + v_x{}^2)^{1/2} = u\tanh(ut/a). \tag{11}$$

Fig. 2



Si noti che la velocità v di P è proporzionale alla proiezione x_A-x del segmento PA nella direzione del moto di A.

L'equazione $\Delta X_t = a\cdot X_t - b\cdot X_t{}^2$ di Pierre François Verhulst e la sua primitiva sono modelli di grande importanza per la descrizione di fenomeni di crescita biologica ed economica.

***Appello**: Caro socio fatti vivo! Rinnova l'iscrizione Mathesis per il 2001. La quota per Verona è di 50.000 lire.*