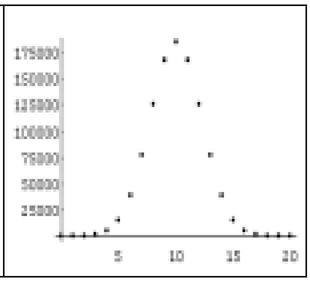
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 36 – dicembre 2000



Quali classi sono anche insiemi ?

di Ruggero Ferro

[*Segue dal n. 34*] Poiché gli insiemi sono classi, per essi vale tutto quanto detto fino ad ora sulle classi per quanto riguarda la notazione, i simboli introdotti, e le operazioni tra di essi. È nostro interesse avere a disposizione il maggior numero possibile di elementi, pertanto decidiamo che una classe sarà un insieme ogni qual volta questa assunzione non porti a contraddizioni come nel caso della classe universale.

Ma come stabilire quando l'assumere che una certa classe è un insieme porta o meno a contraddizioni? La condizione data non è certo operativa. Per superare questa difficoltà si cercherà di indicare dei metodi espliciti e controllabili per determinare classi per le quali non si vede come si potrebbe pervenire ad una contraddizione considerandole come elementi. Così forse non si otterranno tutte le classi che possono essere considerate come insiemi, ma delle classi che possono essere considerate come insiemi, ma delle classi ben riconoscibili che, con buona fiducia, possono essere ritenute insiemi.

Il metodo esplicito che si vuole proporre parte dalla considerazione di certe specifiche classi, che possono essere dette iniziali, per le quali non si vede come possano portare a contraddizione una volta considerate come elementi. Lo stesso metodo, poi, considera certe specifiche operazioni da classi a classi che è ragionevole supporre che preservino l'essere insieme, cioè tali che, se applicate ad insiemi, danno delle classi che ancora non si vede come possano portare a contraddizione se vengono considerate come elementi. Il metodo ci proporrà poi di considerare come insiemi tutte le classi che possono essere ottenute dalle classi iniziali ripetendo opportunamente applicazioni di operazioni che preservano l'essere insieme. L'esplicitazione delle scelte del metodo proposto viene generalmente eseguita proponendo degli assiomi per gli insiemi, cioè affermazioni che dovranno essere soddisfatte dagli oggetti che si intendono chiamare insiemi. Inoltre bisognerà cercare di giustificare quelle affermazioni.

Una classe verrà detta *finita* se è finito il numero dei suoi elementi. Di fatto siamo abituati a considerare le classi finite come elementi: già dall'esempio delle squadre sportive che partecipano ad un torneo (MatematicaMente n. 20) si può rivelare come le squadre siano collezioni che vengono considerate anche insiemi. Anche se non si ha (e non si può avere) alcuna dimostrazione che ciò non porti a contraddizione, tuttavia la sensazione di poter quasi toccare con mano le classi finite, di poterle costruire effettivamente (assumendo che non ci siano limiti di tempo e di spazio per le classi finite ma con un enorme numero di elementi), ci dà la convinzione che assumere che esse siano insiemi non dovrebbe portare ad alcuna contraddizione.

Pertanto, in base al criterio stabilito su quali classi vanno considerate come insiemi, conveniamo che ogni classe finita sia un insieme appunto perché non si vede come questa scelta possa portare a contraddizioni. Così il nostro primo assioma può essere formulato nel modo seguente: ***ogni classe finita è un insieme***.

Per lo stesso criterio che non si vede alcuna controindicazione alla scelta che faremo, conveniamo che (cioè prendiamo per assiomi che) una sottoclasse di un insieme e il risultato di una unione tra insiemi (che di sicuro sono classi) siano anche insiemi. Per quanto intuitivamente chiara, la nozione di finitezza di una classe non è ben precisata. Si può evitare questa difficoltà convenendo che particolari classi finite, quelle con due elementi, siano insiemi (le coppie sono insiemi). Ciò non è limitativo poiché iterando unioni e coppie si arriva a classi con un numero finito arbitrario di elementi, dando così un significato preciso alla finitezza relativamente alla finitezza del processo di iterazione. Si osservi che ogni classe con un solo elemento è un insieme perché la classe {x}, per estensionalità, può anche essere pensata come {x,x} che è un insieme per l'assunzione fatta sulle coppie.

Le funzioni discrete del triangolo di Tartaglia-Pascal

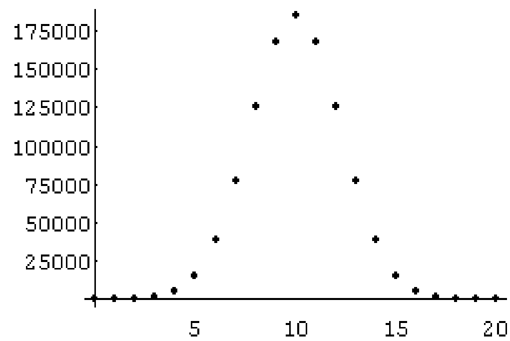
Si consideri la funzione

$$f : k \mapsto \binom{n}{k} \qquad Dom: \{k \mid k, n \in \boldsymbol{N}_0,\ k \le n\}$$

ove $\boldsymbol{N}_0$ è l'insieme dei numeri naturali compreso lo 0. Se n= 20, la funzione diventa:

$$f : k \mapsto \binom{20}{k} \qquad Dom: \{k \mid k \in \boldsymbol{N_0}, k \le 20\}$$

Ecco la sua rappresentazione grafica (alquanto deformata per una variazione pesante di scala tra l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate):



Si nota un comportamento tendenzialmente a campana, che ricorda la funzione di densità di probabilità di Gauss. (*Luciano Corso*)

Tempo proprio

di Paolo Di Sia

Si consideri un sistema di riferimento inerziale **S** e un oggetto in moto uniforme rispetto ad esso. Fissati all'oggetto un orologio e un sistema di coordinate, si ottiene un nuovo sistema di riferimento inerziale, che chiameremo **S'**. Rispetto ad un orologio fisso in **S**, l'oggetto in moto percorre in un intervallo di tempo infinitesimo dt la distanza:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Nel sistema **S'** l'oggetto risulta fermo, pertanto: $dx' = dy' = dz' = 0$.

Dall'invarianza dell'intervallo spazio-temporale, conseguente all'invarianza della velocità della luce e alla trasformazione di Lorentz, in questo caso risulta:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 = c^2dt^2$$

e si ottiene:

$$dt' = dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}} = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Integrando l'espressione precedente si trova l'intervallo di tempo fornito dall'orologio in moto:

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Il tempo di un orologio solidale con un determinato corpo è _il tempo proprio_ di quel corpo. Come si nota dall'ultima formula il tempo proprio di un orologio in moto *risulta più lento* di quello di un orologio fisso.

Perpendicolarità nel piano di Minkowsky $R_{1,1}^2$

di Marco Mantuano * e Nazario Magnarelli **

Consideriamo il piano cartesiano $\mathbf{R}^2$ e in esso definiamo, secondo Minkowsky, il prodotto scalare di due vettori **u** e **v**: $\mathbf{uv} = u_x v_x - u_y v_y$; definiamo poi perpendicolari due vettori se il loro prodotto scalare è nullo, in simboli: $\mathbf{uv} = u_x v_x - u_y v_y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Interpretiamo fisicamente le coordinate dei vettori nel seguente modo: $u_x = ct$, $u_y = s$ (dove c è il valore assoluto della velocità della luce). Iniziamo con il considerare un vettore u che abbia le coordinate uguali in valore assoluto: $|u_x| = |u_y|$ ovvero $v = |x|/|t| = c$ (dove v è il modulo della velocità del punto materiale che si muove in questo caso alla velocità della luce). Esso risulta *perpendicolare a se stesso* e di *lunghezza* nulla:

$\mathbf{uu} = u_x u_x - u_y u_y = |u_y|^2 - |u_y|^2 = 0$

$u = \sqrt{\mathbf{uu}} = 0$.

Un vettore con tali caratteristiche si dice *isotropo*.

Consideriamo poi un vettore per cui $|u_x| > |u_y|$, fisicamente ciò vuol dire che il punto materiale si muove con velocità $v = |x| / |t| < c$: la sua *lunghezza* risulta reale $\mathbf{uu} = (u_x)^2 - (u_y)^2 > 0 \Rightarrow u = \sqrt{\mathbf{uu}} \in \mathbf{R}$, e un vettore perpendicolare a **u** risulta essere il vettore $\mathbf{w}(u_y; u_x)$; infatti si ha: $\mathbf{uw} = u_x u_y - u_y u_x = 0$.

I vettori per cui $|u_x| > |u_y|$ ovvero $v = |x| / |t| < c$ si dicono del *genere tempo* e si trovano all'interno della parte di piano al di sopra delle bisettrici dei primi due quadranti o al di sotto delle bisettrici degli altri due, e $v < c$ può essere interpretata come una velocità. I vettori per cui, invece, $|u_x| < |u_y|$ sono detti del *genere spazio* e hanno *lunghezza* immaginaria: $\mathbf{uu} = (u_x)^2 - (u_y)^2 < 0 \Rightarrow u = \sqrt{\mathbf{uu}} \notin \mathbf{R}$.

* *Docente presso il Liceo Majorana di Latina*
** *Socio Mathesis di Latina*

La congettura di Eulero è falsa, ma vari tentativi di falsificazione sono falliti

di Luigi Landra ***

La lettura del piacevole romanzo dell'algerino Denis Guedj avente per titolo: "Il teorema del pappagallo" [1] mi ha indotto a fare una verifica della presunta falsità della congettura di Eulero secondo la quale non è possibile che la somma di tre cubi di numeri interi positivi fornisca un cubo, che la somma di quattro quarte potenze fornisca una quarta potenza, e così via per potenze maggiori. Se uno di questi numeri è zero si ha il caso particolare, per n=4, $x^4+y^4+z^4=t^4$.

A pag. 461 di detto romanzo l'autore afferma che Noam Elkies, nel lontano 1988, "estrae dal cappello a cilindro quattro numeri che contraddicono l'affermazione di Eulero". Dice di aver controllato la relazione

$2.682.440^4+65.639^4+18.796.760^4 = 20.615.673^4$

e di aver constatato che è vera, concludendo che la congettura di Eulero è falsa.

Usando una calcolatrice tascabile, con mia grande meraviglia, ho rapidamente verificato che tale uguaglianza non sussiste. Risulta infatti:

$2.682.440^4+65.639^4+18.796.760^4 =$

$= 124.885.515.923.598.742.807.165.699.041$

$20.615.673^4 = 180.630.077.292.169.281.088.848.499.041$

La differenza è: 55.744.561.368.570.538.281.682.800.000

Perciò la quaterna di numeri di Noam Elkies non prova la falsità della congettura di Eulero.

Essendomi sorto il dubbio che la quaterna riportata nel romanzo citato contenesse qualche errore di stampa, ho fatto ricerche per avere la conferma dell'esattezza dei numeri della quaterna da qualche altra fonte. Non li ho trovati però ho esaminato altre serie di numeri aventi analoghe pretese. Ho trovato un pezzullo sul n. 240 de "Le Scienze" di Fabrizio Celentano dal titolo: "Fermat forse aveva ragione, Eulero no"[2]. Con mia somma sorpresa ho ancora constatato che, anche le uguaglianze riportate nel pezzullo citato, sono una bufala. Più precisamente quelle trovate nel 1966 da Leon Lander e Thomas Perkin, il cui metodo consisteva nel verificare mediante un elaboratore elettronico tutte le possibili combinazioni di numeri interi. Viene infatti detto che $27^5+84^5+110^5+135^5=144^5$ è una combinazione trovata che prova la falsità della congettura di Eulero.

Ecco i miei calcoli che smentiscono la loro affermazione:

$27^5+84^5+110^5+135^5 = 65.141.902.706.$

$144^5 = 61.917.364.224.$

La differenza è 3.224.538.482. Dunque, anche in questo caso, Eulero non ha torto.

Poi, sempre in [2], si legge:" Questa (dimostrazione) è venuta fra il 1986 e il 1987, ad opera di Noam Elkies e Don Zagier, che hanno lavorato del tutto indipendentemente, ma seguendo una linea di pensiero sorprendentemente del tutto identica. Correlando l'uguaglianza di Euler con la ben nota teoria delle curve ellittiche, hanno risolto il problema con metodi numerici: per n=4 Euler aveva talmente torto che esiste addirittura un'infinità di soluzioni alla sua equazione. La più piccola di queste è fornita da

x=95.800, y=217.519, z= 414.560, t=422.481.

Dato che questa congettura è stata proposta nel 1778, sono occorsi circa 200 anni per dimostrare l'inconsistenza fino a n=5. Per potenze superiori vi è solo un sospetto di falsità".

Dalle mie verifiche risulta che con la seguente quaterna effettivamente viene falsificata la congettura di Eulero.

Ecco la prova:

$95.800^4+ 217.519^4+414.560^4=$

$=31.858.749.840.007.945.920.321$

$422.481^4=$

$=31.858.749.840.007.945.920.321$

Bibliografia: [1] Denis Guedj, «Il Teorema del Pappagallo», Longanesi & C. Editore – Milano, 2000; [2] Fabrizio Celentano, «Fermat forse aveva ragione, Euler no», pag. 12 de "LE SCIENZE" edizione italiana di SCIENTIFIC AMERICAN – n. 240 – agosto 1988

*** *Presidente della Sezione di Seregno (MI) della Mathesis*