MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 37 – gennaio 2001

Una particolare successione definita per ricorrenza

di Luigi Marigo

Le successioni definite per ricorrenza, del tipo:

$$a_{n+1} = A + B/a_n \qquad (1)$$

hanno proprietà degne di attenzione:
- non hanno limiti finito o nullo;
- deve essere $\forall n\ a_n \neq -B/A$, perché altrimenti è $a_{n+1}=0$ e non è definito a_{n+2} (vedi nota);
- sono facilmente invertibili, $a_{n+1}=B/(a_n-A)$, per cui è facile controllare lo scambio tra attrattori e repulsori, se esistono;
- permettono la costruzione di successioni cicliche di periodo r predeterminato.

Sviluppiamo l'ultima proprietà indicata: la successione (1) può essere riscritta in questa forma:

$$a_{n+r} = A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{\cdots \cfrac{\cdots B}{a_n}}} \qquad (2)$$

con r livelli.
Se imponiamo la condizione $a_{n+r}=a_n\ \forall n$ otteniamo una equazione del tipo

$$F_r(a_n, A, B)=0. \qquad (3)$$

Ebbene, se esistono due numeri A_0 e B_0 tali che $F_r(a_n, A_0, B_0)=0$ è identicamente soddisfatta in a_n, allora la successione $a_{n+1}=A_0+B_0/a_n$ è ciclica di periodo r. Analizziamo i primi 3 casi:

- r=1, l'equazione $F_1(a_n, A, B)$ è semplicemente $a_{n+1}=A+B/a_n$ e l'equazione dei punti fissi è $a^2 - A\cdot a - B=0$; se essa ha soluzioni reali a , allora le successioni costanti $a_n=a\ \forall n$ possono considerarsi cicliche di periodo r qualsiasi, e quindi di periodo r = 1.
- r=2, l'equazione $F_2(a_n, A, B)=0$ è $A\cdot(a_n^2-A\cdot a_n-B)=0$; questa equazione à soddisfatta se $a_n^2-A\cdot a_n-B=0$ identicamente in a_n , e ciò è possibile solo per gli eventuali punti fissi reali, altrimenti è soddisfatta identicamente in a_n se è A=0: le successioni $a_{n+1}=B/a_n$ sono appunto cicliche di periodo r=2.
- r=3, l'equazione $F_3(a_n, A, B)=0$ è $(A^2+B)\cdot(a_n^2\text{-}A\cdot a_n\text{-}B)=0$ e per l'annullamento del trinomio valgono le considerazioni precedenti; se $A^2+B=0$, allora $F_3(a_n, A, B)$ è soddisfatta identicamente in a_n. Scegliendo le soluzioni A=1, B= –1 o A= –1, B= –1 si hanno le successioni

$$a_{n+1}=1-1/a_n\ ,\ a_{n+1}= -1-1/a_n \qquad (4)$$

che sono cicliche di periodo n=3, come è facile verificare scrivendo l'equazione (2) con r=3. Con r>3 i calcoli diventano complicati e tediosi, per cui ho affrontato la questione da un altro punto di vista.

Ricordando che in campo complesso

$$\sqrt[r]{z} = \sqrt[r]{\rho}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{r}+\frac{2\cdot k\cdot\pi}{r}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{r}+\frac{2\cdot k\cdot\pi}{r}\right)\right],$$

con k=0, 1 …, r-1, l'equazione dei punti fissi delle nostre successioni, se è $\Delta<0$, ha soluzioni complesse coniugate, e assume la forma $[a-\rho\cdot(\cos\theta + i\cdot \mathrm{sen}\theta)]\cdot[a-\rho\cdot(\cos\theta - i\cdot \mathrm{sen}\theta)]=0$ ovvero

$$a^2-2\cdot a\cdot\rho\cdot\cos\theta+\rho^2=0\ , \qquad (5)$$

ma questa è l'equazione dei punti fissi della successione $a_{n+1} = 2\cdot\rho\cdot\cos\theta - \rho^2/a_n$ e, ponendo ρ =1 senza perdere generalità,

$$a_{n+1}=2\cdot\cos\theta - 1/a_n. \qquad (6)$$

Riscriviamo così le successioni (4): $a_{n+1}=2\cdot\cos(\pm\pi/3)\text{-}1/a_n$; $a_{n+1}=2\cdot\cos(\pm2\pi/3)\text{-}1/a_n$ ove gli angoli sono argomenti di radici cubiche di –1 e di +1: viene il sospetto che la corrispondenza tra la ciclicità di una successione del tipo (6) e la ciclicità delle radici complesse di –1 e +1 non sia limitata a r=3, ma valga per ogni r. Non sono riuscito a dimostrarlo, ma numerosi esperimenti di calcolo numerico concordano con la congettura. Il lettore può provare, assumendo per esempio r=13 e k=7, la successione $a_{n+1}=2\cdot\cos[(\pi/13)(1+2\cdot7]-1/a_n$ è ciclica di periodo 13. E se, nella (6) si pone un θ che non sia argomento di radici di –1 e +1? Se è $\theta=k\cdot\pi/2$ ($k\in z$) si ottengono successioni con punti fissi reali ($\cos\theta=\pm1$) o cicliche di periodo r=2 ($\cos\theta$ =0), in ogni altro caso sperimentato si ottengono successioni di tipo caotico.

Quanto esposto ha carattere di sufficienza: non si può escludere a priori che si possano costruire successioni cicliche usando modelli diversi.

Nota: si può liberarsi della limitazione, se si conviene di considerare l'infinito come un numero, e di considerare il punto improprio (0,1,0) come proprio.

Matematica o misticismo?

di Ivano Arcangeloni *

Il lavoro di Georg Cantor (1845-1918) nelle sue linee principali è a tutti noto: egli ha insistito sulla *cardinalità* degli insiemi numerici per poi condurre le sue ricerche (scoperte?) sui numeri transfiniti, ha poi chiamato *aleph-zero* la cardinalità del discreto, ovvero dell'insieme dei numeri naturali, ha dimostrato col metodo diagonale che l'insieme dei razionali e quello degli algebrici sono equipotenti a quello dei naturali e quindi hanno uguale cardinalità, dimostrato infine l'esistenza di numeri trascendenti, e chiamato *aleph-uno* la cardinalità del continuo. In questa nota non interessa tanto soffermarci sui risultati di quel lavoro, e sui suoi sviluppi, in *primis* l'ipotesi generalizzata del continuo, quanto sul perché tali ricerche siano state accolte con tanta difficoltà nel corpus delle conoscenze matematiche, per la resistenza in particolare di Leopold Kronecker (1821-1891) che impedì, finché in vita, a Cantor di ottenere un incarico all'Università di Berlino. In particolare nel 1887 in un lavoro intitolato "Sulla natura del numero" Kronecker scriveva fra le altre cose "il lavoro di Cantor non è matematica, ma *misticismo* [...]. Si possono accettare i numeri interi perché chiari all'intuizione, sono opera di Dio, tutto il resto è opera dell'uomo e perciò è sospetto" [B.1]. Perché parole tanto furiose, perché toni così accesi? E perché al contrario qualche anno dopo David Hilbert affermava "nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi"? Dunque il lavoro sui transfiniti è prima bollato come misticismo, dopo esaltato come paradisiaco... Come mai toni tanto aspri o entusiasti? Perché evidentemente il lavoro di Cantor andava al di là dell'ambito delle ricerche in matematica, e toccava questioni più profonde del modo di conoscere dell'uomo. Certo c'era da digerire l'idea dell'infinito in atto, c'era da capire cosa fosse il continuo e da darne una definizione convincente, sarà questo uno dei problemi proposti da Hilbert al Congresso dei matematici di Parigi del 1900, ma c'era qualcosa d'altro su cui credo non si sia riflettuto a sufficienza: i numeri irrazionali e trascendenti sono accomunati dal fatto di non avere una rappresentazione in termini di *rapporto* di numeri interi, a differenza di tutti gli altri, tuttavia la matematica dell'antichità classica è ricca di esempi di figure geometriche nelle quali vengono messe in relazione segmenti a lunghezza irrazionale con segmenti a lunghezza razionale, così la lunghezza del lato del quadrato di area due era semplicemente data dalla lunghezza della diagonale del quadrato di lato uno, oppure quella del lato del quadrato di lato tre era data dalla diagonale di un rettangolo di dimensioni 1 e $\sqrt{2}$. Oppure ancora si conoscono procedimenti algoritmici dell'antichità che permettevano di ottenere stime di numeri irrazionali per mezzo di successive approssimazioni, in particolare sempre per la $\sqrt{2}$ si poteva procedere nel modo seguente, come veniva suggerito da Teone di Smirne o da Proclo [B.2]: si considerava un ipotetico quadrato, impossibile da costruire, in cui il lato e la diagonale erano unitari, da lì se ne costruiva un secondo con lato uguale alla diagonale aumentata del lato e con diagonale uguale alla diagonale precedente aumentata del lato raddoppiato, e poi si iterava secondo lo schema che in linguaggio contemporaneo potremo scrivere così: $d_i=2l_{i-1}+d_{i-1}$, $l_i=l_{i-1}+d_{i-1}$; se ne ricava una successione di coppie ordinate, lato-diagonale, i cui primi termini sono: (1,1), (2,3), (5,7), (12,17), (29,41), (70,99), (169, 239), (408, 577), e così via, il rapporto d/l fornisce stime alternativamente per difetto ed eccesso di $\sqrt{2}$, in particolare abbiamo 239/169= 1,4142011 e 577/408=1,4142156, rispetto al valore esatto troncato alla settima cifra decimale di 1,4142135. Questi stratagemmi di catene di "rapporti" che fornivano un'indicazione del valore di certi numeri irrazionali, unitamente al fatto che nell'antichità classica i numeri sostanzialmente erano pensati come misure di lunghezze, mostrano come di fatto con gli irrazionali si sia operato anche in tempi antichi senza troppe difficoltà; è vero che non si possono esprimere come rapporto di numeri interi, ma si possono leggere in qualche modo come "rapporto" di lati opportuni, oppure si possono imbrigliare, e quindi spiegare o comunque "collegare" a quantità intere, in una successione di rapporti razionali. Che dire invece di numeri quali ln2 o simili? Ai matematici la parola "rapporto" ricorda soltanto le frazioni, ma ai non matematici fa pensare a ben altro... Se scrivo "qual è il limite del nostro rapporto?" un insegnante di matematica probabilmente penserà ad un valore numerico, uno di lettere a chissà quali crisi in corso tra moglie e marito...[3]. Non sarà un caso che cose così diverse vengano espresse dalla stessa parola, in realtà il *rapporto* è parola chiave nell'epistemologia: c'è vera conoscenza solo quando si stabilisce un rapporto-legame-relazione tra oggetto e osservatore, o per dirla con Kant, tra intelletto e oggetto. È questo modello conoscitivo che entra irrimediabilmente in crisi con l'avvento dell'aritmetica transfinita; l'esistenza di numeri trascendenti, che infanti Kronecker aborriva, più che degli irrazionali, che appunto si potevano esprimere come "rapporto di grandezze geometriche", l'esistenza cioè di numeri che non si potevano mettere in relazione con l'intelletto, introduceva nella matematica un elemento, dal punto di vista dell'epistemologia kantiana, di *inconoscibilità*, e Kronecker quando parlava di misticismo nel giudicare l'opera di Cantor probabilmente pensava, inconsciamente, a questo, alla definitiva crisi del "modello epistemologico del rapporto", che aveva retto dall'antichità fino a Kant e oltre: si valutino le parole di Eraclito "cose estranee nelle quali siamo soliti imbatterci non ci sottomettono alla tirannia del diverso solo se riusciamo a *concatenarle* stabilendo fra essi *rapporti o relazioni di reciproca similarità*" [4], oppure quelle non troppo dissimili di Kant "i sensi non errano, non però in quanto essi giudichino sempre esattamente, bensì perché essi non giudicano mai. Di conseguenza, così la verità come l'errore non risiedono che nel giudizio, cioè nel *rapporto fra l'oggetto e il nostro intelletto*" [B.5]. Di tanta tradizione filosofica ed epistemologica si è fatto paladino Kronecker, e che le resistenze inconscie dovettero essere forti alla fine dell'Ottocento per me prova anche il fatto che *logos* deriva proprio da *leghein*, legare o mettere in relazione… Oggi noi sappiamo che questo modello della conoscenza è fallace, sappiamo che l'interferenza dell'osservatore sull'osservato può essere talmente nefasta da alterare profondamente le caratteristiche dell'oggetto osservato, cioè non solo l'idea del rapporto come conoscenza è stata superata, ma si è dimostrato il contrario: che il rapporto rende impossibile la "vera" conoscenza, tuttavia alla fine del XIX secolo quel modello epistemologico era ancora assolutamente in auge, almeno fino a quando Cantor non lo mise in crisi, almeno in matematica.

Bibliografia e note: [B.1] Citato in: Kline, M., *Storia del pensiero matematico*, tr. It., G. Einaudi editore, Torino 1962, p. 1395; [B.2] Zellini P., *Gnomon, una indagine sul numero*, Milano 1999, pp. 184 e segg.; [3] D'altro lato è vero che un rapporto è "divisione", ovvero non ci può essere rapporto se non tra cose divise, o anche "in ogni rapporto si resta *divisi*";[4] Zellini P., *Gnomon*, cit. p 35 (i corsivi sono miei); [B.5] Kant, I., *Critica della ragion pura*, in Chiodi, P., (a cura di) *Il pensiero di Immanuel Kant*, Torino, 1985, p. 35 (i corsivi sono miei).

* *Docente di Matematica – socio Mathesis – di Forlì*

Sulla congettura di Eulero (Matem… n. 36)

Presentiamo una nota sulla congettura di Eulero, articolo di Luigi Landra, MatematicaMente n. 36. Essa in sostanza evidenzia che quando si ha a che fare con numeri descritti da «parole» con un elevato numero di caratteri è facile sbagliare scrittura. Sbagliando scrittura, si sbaglia poi di conseguenza interpretazione. In ogni caso l'articolo di Landra ha dimostrato quanto sia alto l'interesse per le congetture.

La nota riguarda una osservazione del nostro socio Mauro Zoffoli di Cesena, il quale ci scrive: «Ho ricevuto in questi giorni MatematicaMente di dicembre 2000 che ho letto con molto interesse. Mi ha colpito molto l'articolo sulla congettura di Eulero. Mi ricordavo di aver letto qualcosa sul tema e ho cercato il libro per vedere se anche in questo i valori indicati non falsificavano la congettura di Eulero. Dopo un po' di ricerca ho trovato il libro "La teoria dei numeri" di Manfred R. Schroeder, Franco Muzzio editore che a pagina 158 riporta il seguente caso: $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ che, ad una verifica, è risultata esatta. Come si vede è sostanzialmente il secondo esempio riportato nell'articolo con 133 al posto di 135, quindi con ogni probabilità nell'articolo de "Le Scienze", citato da Landra, c'è stato un errore di trascrizione. Mi è quindi venuta l'idea che anche il caso del libro "Il teorema del Pappagallo" fosse un errore di trascrizione e ho cercato quale errore potesse essere stato fatto. Per determinarlo ho ipotizzato che l'errore fosse stato fatto su un solo termine, ho indicato con x il suo valore e ho cominciato a provare se l'errore fosse stato fatto sul primo termine. Doveva quindi essere
$(2682440+x)^4+65639^4+18796760^4=20615673^4$.

Ho risolto con DERIVE l'equazione in modo approssimato, scegliendo l'intervallo di ricerca molto ampio (10^9). Ho poi aggiunto il valore trovato arrotondato a 2682440 e ho richiesto la soluzione della nuova equazione. Ho constatato che la soluzione non era intera. Ho ripetuto il procedimento sul secondo termine ed ho trovato una soluzione intera. Precisamente invece di 65639 doveva essere 15365639, come si vede sono state soppresse le prime tre cifre. An-che in questo caso quindi è stato un errore di trascrizione, l'uguaglianza corretta è: $2682440^4+15365639^4+18796760^4= 20615673^4$.
Curioso che in due occasioni i valori siano stati sbagliati.»