MatematicaMente

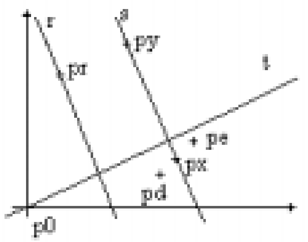
Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 38 – febbraio 2001

Fra Logica e Geometria Analitica

di Francesco Mele * e Giovanni Minei **

Nella seguente esposizione non enfatizzeremo gli aspetti di interesse didattico. Vi è però la speranza che qualche lettore la trovi interessante da questo punto di vista, magari per ciò che riguarda la rappresentazione di semplici problemi di geometria analitica.

Supponiamo di voler rappresentare, in qualche linguaggio logico (supponiamo sia un linguaggio tipo clausole di Horn, ma non lo riteniamo importante in questo contesto), fatti e regole di inferenze per la geometria analitica. Concentriamoci su un problema di esempio: determinare l'equazione della retta t passante per l'origine p0 e perpendicolare alla retta r. Sia r passante per il punto pr(1, 4), parallela alla retta s, con s passante per il punto py(3,5) e per il punto px medio tra i due punti pd(4,1) e pe(5,2).



Proponiamo di rappresentare il problema nel seguente modo:

```
(1)  retta_passante_1p(r,pr).
(2)  perpendicolarità(t,r).
(3)  parallelismo(r,s).
(4)  retta_passante_1p(t,p0).
(5)  coordinate(p0,0,0).
(6)  retta_passante_2p(s,py,px).
(7)  punto_medio(px,pd,pe).
(8)  coordinate(pr,1,4).
(9)  coordinate(pd,4,1).
(10) coordinate(pe,5,2).
(11) coordinate(py,3,5)
```

(contrariamente a quello che si fa in logica classica, le costanti le esprimeremo con lettere minuscole e le variabili con lettere maiuscole).

Appare evidente dalla (5), (8), (9), (10), (11) che "essere coordinate" di un certo punto viene rappresentato come un predicato a tre posto coordinate(N,X,Y) di cui il primo argomento N rappresenta il nome del punto, X l'ascissa relativa e Y l'ordinata. Intuitive sono le relazioni del tipo (3) e (4). Qualche commento può essere utile alla (4), una particolare instanziazione dell'insieme di tutte le rette che passano uno specifico punto. Per il concetto (6) vale quanto appena detto per la (4). Fornendo una "lettura" di tipo logico alle clausole presentate, un'espressione tipo la (2) va letta come "è vero che *t* è perpendicolare ad *r*".

Passiamo adesso alla parte che riguarda la formulazione delle inferenze logiche. Con *coeff_angolare(S,M)* esprimeremo la relazione che c'è tra una retta di nome *S* e il suo coefficiente angolare (valore) *M*.

Una inferenza (è ovvio che ce ne sono altre che coinvolgono lo stesso concetto) è la seguente:

```
(12) coeff_angolare(S,M) ←
     parallelismo(S,T)    &
     coeff_angolare(T,M1) &
     M = M1.
```

Nella (12) (come in tutte le regole inferenziali che seguono) le variabili (lettere maiuscolo) si sottintendono tutte quantificate universalmente. Con queste convenzioni l'inferenza (12) va letta come: per ogni S,M,T,M1, la retta S è coefficiente di M se la retta S è parallela alla retta T e il coefficiente angolare della retta T è M1 con M = M1. La (12) essendo una clausola di Horn può ovviamente avere (almeno) due letture: una lettura logica: "è vero che S è la retta di coefficiente angolare M, se è vero che etc…"; e un'altra - più interessante dal punto di vista della risoluzione dei problemi - procedurale: "possiamo conoscere (raggiungere lo scopo, arrivare all'obiettivo) il coefficiente angolare S della retta M, se conosciamo che S è parallela a T etc.". Stabilita quindi la rappresentazione, riportiamo le altre inferenze necessarie per la risoluzione del problema iniziale posto:

```
equazione(S,M,N)                ←
   coeff_angolare(S,M)          &
   term_noto(S,N).
   coeff_angolare(S,M)          ←
   perpendicolarità(S,T)        &
   coeff_angolare(T, M1)        &
   M = -1/M1.
coordinate(P,X,Y)               ←
   punto_medio(P,P1,P2)         &
   coordinate(P1,X1,Y1)         &
   coordinate(P2,X2,Y2)         &
   X = (X1 + X2)/2              &
   Y = (Y1 + Y2)/2.
equazione(S,M,N)                ←
   retta_passante_2p(S,P1,P2)   &
   coordinate(P1,X1,Y1)         &
   coordinate(P2,X2,Y2)         &
   M = (Y2 – Y1)/(X2 – X1)      &
   N = Y1 – X1*(Y2-Y1)/(X2-X1).
equazione(S,M,N)                ←
   retta_passante_2p(S,P1,P2)   &
   coordinate(P1,X1,Y1)         &
   parallelismo(S,T)            &
   equazione(T,M1,N1)           &
   M = M1                       &
   N = Y1 – X1.
```

Le inferenze che abbiamo riportato sono quelle necessarie alla risoluzione del problema posto e di altri che coinvolgono gli stessi concetti.

Nota: L'esercizio presentato è stato esteso come un simpatico gioco a quasi tutti i concetti che riguardano la geometria analitica della retta (50 inferenze circa) adoperando una rappresentazione cartesiana, e non esplicita della retta, per le particolari limitazioni che quest'ultima presenta (non rappresentabilità delle rette parallele all'asse delle ordinate). Le inferenze presentate costituiscono un piccolo risolutore automatico di problemi di geometria analitica. In questa breve presentazione non abbiamo riportato gli aspetti computazionali relativi al *problem solving* di attivazione delle inferenze. A tal riguardo gli autori hanno realizzato un programma di interpretazione del linguaggio presentato in Prolog (per gli interessati: e-mail: [mele,minei]@marscenter.it).

* *ricercatore del Mars Center dell'Università di Napoli*

** *ricercatore del Mars Center dell'Università di Napoli*

Teorema dei Residui

di Arnaldo Vicentini

Nel successivo articolo, Mantuano & Magnarelli fanno uso del *teorema dei residui* riguardante l'integrale nel campo complesso d'una funzione lungo una linea chiusa che aggiri un punto di singolarità nel quale la funzione diverge. Per agevolarne la lettura, si ritiene utile giustificare la formula da essi impiegata con questo richiamo introduttivo.

Teorema (dei residui). Sia $z = x + i\cdot y$ –con x e y reali e i unità immaginaria– la variabile complessa della funzione complessa $f(z)$ analitica ovunque nella regione semplicemente connessa Σ delimitata dalla linea chiusa Γ tranne il punto $z=a$, tendendo z al quale $f(z)$ tende all'infinito. Si dice che $f(z)$ ha in a un polo di ordine n se esistono un intero $n > 0$ ed un complesso $k \neq 0$ tali che:

$$\lim_{z\to a}\left[f(z)\cdot(z-a)^n\right] = k\,. \tag{1}$$

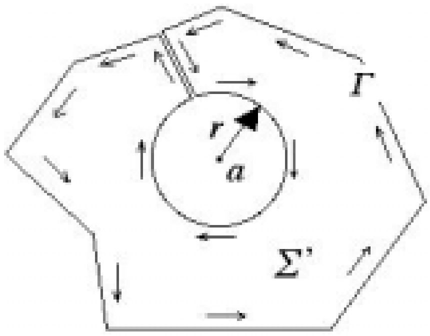
In tali condizioni, detto J l'integrale di $f(z)$ lungo Γ, risulta:

$$J = \oint_\Gamma f(z)\cdot dz = 2\cdot\pi\cdot i\cdot R(a)\,, \tag{2}$$

dove $R(a)$, detto *residuo* di $f(z)$ in a, vale:

$$R(a) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}\left[f(z)\cdot(z-a)^n\right]}{dz^{n-1}} \tag{3}$$

Prova:



a) J non dipende dalla particolare linea chiusa Γ che può essere sostituita da qualsiasi circonferenza di centro a interna a Σ. Ciò è chiarito dalla figura accanto: l'integrale lineare di f(z) lungo il bordo (indicato dalle frecce) della regione a "corona tagliata" Σ è nullo.

b) Sia $g(z)$ tale che $z\neq a$ implica $g(z)=f(z)(z-a)^n$ mentre $z=a$ implica $g(a)=k$. Allora $f(z)=g(z)/(z-a)^n$; e $g(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di a. Calcolando J lungo una circonferenza di centro a e raggio r, e ponendo $z-a=re^{i\cdot\varphi}$, onde $dz = i\, r\cdot e^{i\cdot\varphi}d\varphi$, abbiamo:

$$J = \oint\frac{g(z)}{(z-a)^n}dz = \oint_\Gamma\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^{m-n}dz =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{g^{(m)}(a)}{m!}r^{m+1-n}\cdot e^{(m+1-n)\varphi}\cdot i\cdot d\varphi\,.$$

Nell'ultimo membro, essendo $e^{2\pi i}=e^{i0}=1$, ogni addendo è nullo tranne quello per $m=n-1$. Pertanto, ricordando anche la definizione di $g(z)$:

$$J = \oint_\Gamma f(z)dz = 2\cdot\pi\cdot i\cdot\frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{2\cdot\pi\cdot i}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}\left[f(z)\cdot(z-a)^n\right]}{dz^{n-1}} = 2\cdot\pi\cdot i\cdot R(a)\,.$$

Applicazione del Teorema dei Residui al calcolo di un integrale

di Marco Mantuano * e Nazario Magnarelli **

Data la funzione reale di variabile reale $f(x)=1/(x^2+1)^3$, infinitesima d'ordine 6 rispetto a $1/x$ per $x\to\infty$, sia da calcolare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot dx\,.$$

Mostriamo come, estendendo il dominio di f dai reali x ai complessi $z=x+i\cdot y$ – ossia introducendo la funzione complessa $f(z)$ – si possa calcolare l'integrale applicando il *Teorema dei Residui*. I poli distinti di $f(z)$ – zeri del denominatore – sono z_1=i e z_2=-i, entrambi di molteplicità 3. Nel piano di Gauß, essi cadono sulla circonferenza di centro $O(0;0)$ e raggio 1. Sia C la semicirconferenza per $y \geq 0$ del cerchio di centro O e raggio r e Γ il percorso chiuso unione di C con il segmento dato da $y = 0$ e $-r \leq x \leq r$. Per $r>1$, il polo z_1= i cade in un punto non di frontiera della regione delimitata dalla linea Γ. Ricordiamo che il residuo di $f(z)$ nel polo z_k di molteplicità n è:

$$R(z_k) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\left.\frac{d^{n-1}\left[f(z)\cdot(z-z_k)^n\right]}{dz^{n-1}}\right|_{z=z_k}$$

e che il teorema dei residui afferma che se $f(z)$ è analitica in una regione piana semplicemente connessa delimitata dalla linea chiusa Γ tranne il polo z_k di molteplicità n non di frontiera, allora:

$$\oint_\Gamma f(z)\cdot dz = 2\cdot\pi\cdot i\cdot R(z_k)$$

Nel nostro caso, al tendere all'infinito di r, l'integrale lungo la linea chiusa Γ si riduce all'integrale lungo l'asse reale poiché tende a zero l'integrale lungo la semicirconferenza C. Perciò:

$$\int_\Gamma\left[\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]\cdot dx = 2\cdot\pi\cdot i\cdot R(i) = \frac{2\cdot\pi\cdot i}{2!}\cdot\left.\frac{d^2(z+i)^{-3}}{dz^2}\right|_{z=i} =$$

$$= \frac{3}{8}\pi$$

* *Docente presso il Liceo "E. Majorana" di Latina*
** *Socio Mathesis di Latina*

La versiera di Agnesi e la densità di probabilità di Cauchy

[Segue dal n. 25] Un caso particolare della versiera di Agnesi $[y=a^3/(a^2+x^2)]$ si ha quando si pone $a=1/\pi$ e si fa una sostituzione di variabile $z=\pi\cdot x$. Si ottiene la seguente densità di probabilità, nota come densità di Cauchy:

$$h(z) = \frac{1}{\pi\cdot(1+z^2)} \qquad Dom:\{z \mid z\in\mathbf{R}\}$$

La sua funzione di ripartizione è data da:

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{Arc\tan(z)}{\pi}$$

La caratteristica più rilevante della densità di Cauchy è che z è sprovvista di momenti. (*di Luciano Corso*)

Mathesis Sezione di Catanzaro
Catanzaro 29-30-31 marzo 2001
Convegno di Studi sul tema: *Essenzialità, storicità, problematicità nei nuovi curricoli di Matematica e Fisica.*
Per informazioni si contatti il prof. Salvatore Ciurleo
tel.0961-61593, e-mail: sciurle@tin.it