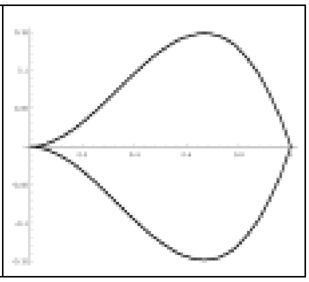
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 39 – marzo 2001



Gli assiomi di rimpiazzamento e della potenza per gli insiemi

di Ruggero Ferro [1]

Poiché si ha l'impressione che le classi proprie, quelle che non possono essere considerate come elementi, siano quelle con troppi elementi come la classe universale, conveniamo che *le classi che hanno tanti elementi quanti quelli di un'altra classe, che sappiamo essere un insieme, siano anche insiemi*. Diremo che una classe ha tanti elementi quanti quelli di un altra classe quando si può descrivere un modo di far corrispondere ad ogni elemento della prima classe un unico elemento della seconda classe e, così facendo, ottenere tutti gli elementi della seconda classe al variare dell'elemento della prima classe a cui corrispondono.

Anche le classi intersezione di insiemi o differenza di insiemi saranno insiemi perché, come abbiamo già osservato, sono sottoclassi di alcuni degli insiemi dati. Invece, il complementare di un insieme non è un insieme perché se, per assurdo, lo fosse allora anche l'unione tra l'insieme e il suo complementare sarebbe un insieme per quanto convenuto sull'unione; ma l'unione di un insieme con il suo complementare è la classe universale che non è un insieme, come abbiamo già visto.

In quello che faremo, però, non useremo la complementazione, oppure, se lo faremo, useremo tutte le opportune cautele e lo diremo esplicitamente. Attenzione però che a volte si considera la differenza tra insiemi e l'insieme da cui si toglie l'altro può non essere menzionato esplicitamente (perché ovvio dal contesto) e potrebbe sembrare che si consideri la complementazione, anche se non è così. Ad esempio, quando si parla di numeri naturali e si vuole considerare l'insieme dei non pari, in effetti non intendiamo la classe complemento dell'insieme dei numeri pari (a cui appartengono anche tutte le cose che non sono numeri naturali), bensì l'insieme dei numeri naturali meno l'insieme dei numeri pari, cioè la differenza tra questi due insiemi, che è un insieme.

Poiché si è deciso che le sottoclassi di un insieme sono insiemi (le chiameremo *sottinsiemi*), possiamo considerare anche la classe di tutti i sottinsiemi di un insieme dato X, cioè $\{s : s \subseteq X\}$. Conveniamo che anche questa classe sia un insieme ancora perchè non si vedono controindicazioni a questa scelta. L'insieme dei sottinsiemi sarà chiamato *l'insieme potenza* dell'insieme X e sarà indicato con P(X), che si legge P di X. Ad esempio, se X= {a,b} allora P(X)= { ø, {a}, { b}, {a,b} }. Si noti che, se X è un insieme finito con n elementi allora anche P(X) è un insieme finito che ha, invece, 2^n elementi.

Si noti anche che, se da una parte è relativamente facile riconoscere che un certo insieme dato è un sott'insieme di un altro insieme ben precisato, dall'altra, in generale, non è altrettanto facile riconoscere quali sono tutti i sottinsiemi di un insieme dato: ci sono metodi per indicare certi sottinsiemi a partire da collezioni di sottinsiemi, e si dovrebbe prima conoscere la classe dei sott'insiemi per precisare quali sono alcuni sottinsiemi di un insieme dato. Questo fenomeno va sotto il nome di impredicatività della classe dei sottinsiemi di un insieme. Ciò sembrerebbe violare l'assunzione di fondatezza richiesta per il concetto di classe (e di insieme) che si sta proponendo. Ma non è così, bensì si tratta di accettare la precisazione della nozione di conoscere (nozione che abbiamo già osservato essere molto vaga) affermante che dato un insieme immediatamente si possono conoscere i suoi sottinsiemi. In questa esposizione decidiamo di accettare tale posizione, pur sapendo che è un'assunzione molto impegnativa, e che si possono avere interessanti sviluppi della nozione di insieme anche rifiutando questa assunzione, o limitandosi a considerare solo classi i cui elementi siano sottinsiemi di un'insieme ben precisabili (in un modo tutto da puntualizzare in esposizioni dedicate a ciò).

[1] *Docente di Logica Matematica presso la Facoltà di Scienze MM. FF. NN. Corso di Informatica dell'Università degli Studi di Verona*

Il terzo problema di Hilbert

di Franco Nuzzi [2]

Come è noto, nel piano si ha che se due poligoni sono equiscomponibili, ovvero sono scomposti nello stesso numero finito di poligoni fra loro congruenti, allora sono equiestesi e viceversa. Purtroppo nello spazio tridimensionale la situazione si complica: mentre infatti è vero che se due poliedri sono equiscomponibili allora sono equiestesi, e quindi hanno lo stesso volume, non è vero il contrario, esistono cioè poliedri equiestesi che non sono equiscomponibili. È questa in sostanza la risposta al terzo problema di Hilbert, risolto nel 1902, a soli due anni dalla sua formulazione, dal suo allievo Dehn, il quale dimostrò che un cubo non è equiscomponibile con un tetraedro regolare.

Questo problema deve la sua importanza in base al suo stretto legame con tutta la teoria del volume che non può pertanto essere sviluppata usando esclusivamente processi finiti. In effetti osserviamo che mentre la dimostrazione della formula che fornisce l'area del triangolo è semplice, quella per il tetraedro è più complessa e basata, sotto certi aspetti, proprio sulla nozione di limite che a sua volta, come sappiamo, poggia le sue fondamenta sull'insieme dei reali. La soluzione del terzo problema di Hilbert non è particolarmente complessa, a differenza degli altri problemi della celebre lista, e riteniamo che possa essere di comune interesse fornire le linee generali della dimostrazione di Dehn. Anzitutto, con un po' di trigonometria e qualche considerazione geometrica, si ricava che per l'angolo diedro α di un tetraedro regolare vale la relazione $cos(\alpha) = 1/3$. In secondo luogo Dehn comprese che per ben caratterizzare il concetto di equiestensione fra poliedri attraverso la scomposizione con piani di intersezione, occorreva introdurre una grandezza D, nota oggi come invariante di Dehn, usando la quale si dimostra che, se P e Q sono due poliedri equiscomponibili, allora D(P) = D(Q). D è così definita: $D = \Sigma_i L_i \otimes \alpha_i$, dove le L_i sono le lunghezze degli spigoli e gli α_i sono i rispettivi angoli diedri. L'operazione $\otimes$ gode di certe proprietà che richiamano il prodotto tensoriale e, da un punto di vista specificatamente geometrico, trova una interessante visualizzazione nella scomposizione con un piano di un poliedro:

R_1: $L \otimes (\alpha + \beta) = L \otimes \alpha + L \otimes \beta$

R_2: $(L + M) \otimes \alpha = L \otimes \alpha + M \otimes \alpha$

R_3: $L \otimes \pi = 0$.

La prima regola afferma che un poliedro di spigolo L cui corrisponde un angolo diedro di ampiezza $(\alpha+\beta)$ si può scomporre in due poliedri che condividono lo stesso spigolo L e con diedri rispettivamente α e β. La seconda dice che un poliedro di spigolo (L+M) cui corrisponde il diedro α si può scomporre in due poliedri uno di spigolo L e diedro α e l'altro di spigolo M e stesso diedro α. In particolare la terza legge dice che uno spigolo con un angolo di 180° può essere ignorato.

È possibile ora caratterizzare il cubo e il tetraedro: ad esempio per il cubo è facile ricavare che D(C) = 0: per le proprietà R_1, R_2, R_3 è

$$D(C) = \sum_{i=1}^{12} L_i \otimes \alpha_i = \sum_{i=1}^{12} L \otimes \frac{\pi}{2} = 6 \cdot \left(L \otimes \frac{\pi}{2} + L \otimes \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= 6 \cdot L \otimes \pi = 0 .$$

Per il tetraedro è invece

$$D(T) = \sum_{i=1}^{6} L \otimes \arccos(1/3)$$

e dimostriamo di seguito che $D(T) \neq 0$ per cui cubo e tetraedro non sono equiscomponibili. Ora in generale un teorema assicura che $D(T) \neq 0$ se $L \neq 0$ e α non è multiplo razionale di π, per cui nel caso del tetraedro, occorre far vedere che, per ogni n intero positivo, $\cos(n \cdot \alpha) \neq \pm 1$. In realtà proviamo qualcosa di più forte e cioè che $\cos(n \cdot \alpha) = q_n/3^n$ dove n è un numero intero positivo e q_n un intero non divisibile per 3. Usiamo il metodo di induzione per quest'ultima relazione che è senz'altro vera per n=1 essendo come già detto $\cos(\alpha)=1/3$. Ora, supponendo che sia vera per k=n verifichiamola per k=n+1. Dalla trigonometria si ha che $\cos(k+1)\cdot\alpha = 2\cdot\cos(k\cdot\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \cos(k-1)\cdot\alpha$ e inoltre l'ipotesi induttiva dà $\cos(k\cdot\alpha) = q_k/3^k$ e $\cos(k-1)\cdot\alpha = q_{k-1}/3^{k-1}$ dove q_k e q_{k-1} sono due interi non divisibili per 3. Quindi: $\cos(k+1)\cdot\alpha = (2/3)\cdot q_k/3^k - q_{k-1}/3^{k-1} = (2\cdot q_k - 9\cdot q_k)/3^{k+1}$ cioè $\cos(k+1)\cdot\alpha = q_{k+1}/3^{k+1}$ avendo posto $q_{k+1} = (2\cdot q_k - 9\cdot q_k)$ che risulta anch'esso non divisibile per 3 in quanto non lo è $2\cdot q_k$.

Bibliografia: [1] J.Stillwell - Numbers and Geometry – Springer; [2] M. Laczkovich - Conjecture and proof- TypoTeX - Budapest.

(1) Liceo Q.O. Flacco di Bari - Presidente Mathesis della sezione di Bari

Come si è arrivati alle teorie di stringa?

di Paolo Di Sia

La scoperta dell'elettrone costituisce per certi aspetti l'inizio di un nuovo indirizzo della fisica, la fisica delle particelle elementari. Le osservazioni sperimentali del mondo microscopico, che hanno portato alla nascita della *Fisica Quantistica* e della *Meccanica Quantistica (M.Q.)*, hanno permesso di suddividere le particelle conosciute in due classi: i BOSONI, particelle che trasmettono le forze e i FERMIONI, particelle che costituiscono la materia.

Dalla teoria della *Relatività Ristretta* (*R.R.*) di Einstein il processo di unificazione è passato attraverso due fasi molto importanti:

1) l'abbinamento della *R.R.* con la gravità, che ha dato origine alla *Relatività Generale*;

2) l'abbinamento della *R.R.* con lo sviluppo della *M.Q.*, che ha portato alle *Teorie di Campo Quantistiche Relativistiche.*

Le teorie di campo quantistiche relativistiche forniscono risultati molto buoni nella descrizione del comportamento e delle proprietà osservate delle particelle elementari, a condizione però che la gravità sia così debole da poter essere trascurata. I problemi sono nati dalle distanze nulle a cui accadono le interazioni della fisica delle particelle. La relatività generale infatti non dà problemi solo se ammettiamo un universo puramente classico e che non ci sia bisogno della M.Q. nella descrizione della natura. La matematica della gravità si comporta male a distanza nulla.

Nella teoria di stringa si passa *da* un punto *ad* una linea che, per quanto piccola, ha una lunghezza finita (la dimensione media di una stringa è dell'ordine della lunghezza di Planck, circa 10^{-33} cm). Questo fa in modo che le stringhe interagiscano ad una distanza piccola, ma non nulla e questo permette di superare i problemi legati agli infiniti indesiderati che apparivano nel precedente scenario e di poter combinare M. Q. e gravità. Sono nate varie teorie di stringa e sono state classificate in base alla richiesta di essere aperte o chiuse e se lo spettro delle particelle include o meno fermioni. Le teorie di stringa che coinvolgono solo BOSONI (particelle che trasmettono forze) sono teorie di STRINGA BOSONICA, se coinvolgono anche FERMIONI (particelle che costituiscono la materia) si considera una particolare simmetria, la SUPERSIMMETRIA, e abbiamo teorie di SUPERSTRINGA. Per questioni di coerenza interna alle teorie, importante è anche il numero di dimensioni spazio-temporali: 26 per le stringhe bosoniche e 10 per le superstringhe. Un grosso capitolo di queste teorie riguarda il problema della compattificazione delle extradimensioni. Sembra inoltre che le varie teorie non siano totalmente differenti, ma siano in realtà modi diversi di vedere la stessa teoria. Si parla perciò di una sola teoria, la teoria M (teoria madre).

Politecnico di Milano

Progettazione della comunicazione WEB ed e-commerce

Responsabile operativo: Claudia Piacenza – Direttore: Attilio Carotti
Tel. 02 2399.2509 – fax 02 2399.2511
e-mail: claudia.piacenza@ceda.polimi.it
Tema: Modellistica Matematica nel *Financial Engineering*
Luogo: Milano Via D'Ovidio 3 – 20133 Milano
Tempi: 30-31 Maggio 2001 (16 ore).

Convegno

Responsabile operativo: ch.mo prof. Fabio Mercanti, tel. 02 23995119 – 0335 7793114
e-mail: fabmerca@tin.it
Tema: *Contributi di scienziati mantovani allo sviluppo della matematica e della fisica*
Luogo: Mantova
Tempi: 17 – 19 Maggio 2001

Perdersi per un momento

di Luciano Corso

Vago in uno spazio di punti in fuga, ora attratto, in vortici strani, da oggetti apparentemente reali, ora respinto da insiemi astratti dalle bizzarre forme, sorgenti di punti che vanno lontano a formare, in una continua aggregazione e disgregazione, nuova materia. È il caos che domina in questo universo ricco solo di vuoto occupato da confusa e informe materia. Qui, trovi gli attrattori che incatenano; qui sono i repulsori, entità irrequiete che allontanano da sé tutto, spingendo via ogni cosa, anche i pensieri. Sei un punto tra altri nulla e non fai che correre da parti in parti di questo spazio senza limiti, senza un perché. Se vuoi scoprire il mistero - vedi? - ti smarrisci in un gioco combinatorio pericoloso, labirintico, senza scampo.