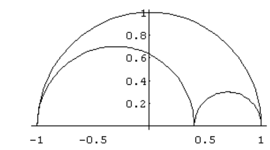
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 41 – maggio 2001



Assioma dell'infinito

di Ruggero Ferro

Per gli sviluppi matematici successivi, ed in particolare per una precisa introduzione dei numeri reali, è opportuno assumere che anche la classe dei numeri naturali, che indicheremo con N, sia un insieme. Questa forse è l'assunzione più gratuita e meno giustificata, essendo l'utilità per lo sviluppo della matematica la sola motivazione che ci spinge ad accettare questa ipotesi. Anche se questa motivazione ha poco a che vedere con il convincerci che da essa non possono derivare contraddizioni, di fatto finora non se ne sono trovate, e ciò ci permette di continuare ad accettare l'ipotesi che la classe dei numeri naturali sia un insieme. Se uno fosse perplesso per il fatto che non si sono ancora definiti i numeri naturali in un ambiente insiemistico, l'assunzione che la classe dei numeri naturali è un insieme può essere sostituita con l'affermazione che la collezione N*, che tra poco preciseremo, è un insieme. Questa affermazione è equivalente alla prima, qualunque sia la nozione di numero naturale che verrà precisata, grazie all'assunzione che una classe che ha tanti elementi quanti quelli di un insieme è essa pure un insieme.

Per arrivare alla collezione N* iniziamo con il considerare particolari collezioni e precisamente
$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.
Sappiamo già che $\emptyset$ è un insieme. Osserviamo che ciascuno di queste collezioni (diciamola X), fuorché $\emptyset$, può essere ottenuta dalla precedente (diciamola Z) facendo l'unione di Z con $\{Z\}$. Poiché $\{Z\} \notin Z$ - dal momento che abbiamo convenuto per la fondatezza che una collezione non può essere elemento di sé stessa neppure quando è un insieme - si ha che la collezione $Z\cup\{Z\}$ ha tutti gli elementi della collezione Z e uno in più, che è la stessa collezione Z. Così ognuna di queste collezioni è la collezione delle precedenti, se queste possono essere considerate elementi. Ma ciò è vero per il seguente motivo. Se Z è un insieme allora lo sono anche $\{Z\}$ e $Z\cup\{Z\}$, per le assunzioni già fatte su come ottenere altri insiemi; così, poiché $\emptyset$ è un insieme, lo saranno via via anche tutti quelli che si otterranno ripetendo il passaggio dall'insieme allo stesso insieme unito al suo singolo. Questa costruzione può essere continuata oltre gli insiemi indicati prima, ottenendo così la successione di tutti e soli gli insiemi ottenuti a partire da $\emptyset$ solo ripetendo l'operazione di passaggio da uno già ottenuto, Z, a $Z\cup\{Z\}$. N* è esattamente la collezione che ha per elementi gli elementi della successione indicata. Si noti che ciascuno degli insiemi di N* ha un numero di elementi diverso dal numero di elementi di un altro elemento di N*, e che per ogni numero naturale c'è un elemento di N* che ha esattamente quel numero di elementi. Così gli elementi di N* sono tanti quanti i numeri naturali in qualsiasi senso ragionevole si introducano i numeri naturali, e l'avere affermato che la collezione N* è un insieme corrisponde all'affermare che la collezione dei numeri naturali (comunque ragionevolmente siano introdotti) è pure un insieme.

Geometrie che ripugnano alla "natura della linea retta"

di Ivano Arcangeloni *

[*Segue dal n. 40*] Ma i *Grundlagen* sono del 1899 [B.4], fino ad allora la discussione sulla rigorosità delle definizioni euclidee era stata piuttosto marginale. Eppure l'idea di retta viene difesa con più vigore di quanto non sia accaduto con "l'idea che il sole si muove", e che il sole si alzi e tramonti lo "vediamo" tutti. In questo senso è sicuramente esemplare l'opera del frate Gerolamo Sacchéri che, con l'intenzione di "stabilire con rigore i principi fondamentali" della geometria, dà alle stampe l'*Euclides ab omni naevo vindicatus*; il lavoro pubblicato nell'anno della morte del frate, il 1733, verrà presto dimenticato e sarà riscoperto soltanto dal Beltrami alla fine del secolo successivo [B.5]. L'opera del Sacchéri tuttavia, anche se non è significativa ai fini della ricostruzione storica delle vicende del quinto postulato, è interessante per il fatto che, nel tentativo di dimostrare *per assurdo* la fallacia delle due ipotesi dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto [B.6], analoghe a supporre una geometria ellittico-sferica o iperbolica, ci dà una dimostrazione ante-litteram di tutta una serie di risultati validi in geometria iperbolica, negandoli successivamente con l'unica argomentazione che quanto illustrato era "*repugnans naturae lineae rectae*". C'era allora per il frate di Sanremo una "natura della retta", non scritta nei *termini* euclidei, ma assolutamente *indiscutibile*, che si stava violando supponendo vera l'ipotesi dell'angolo acuto! Gli errori di un fraticello ci possono far sorridere, anche se diventano significativi in quel contesto storico, poiché ci possono aiutare a fare luce sui perché di questa difficoltà ad accettare una nuova geometria, quando si era già accettata l'idea di un nuovo mondo. Più interessante ancora sarà tentare di capire il perché delle esitazioni di Gauss. In effetti Gauss era perfettamente conscio dell'impossibilità logica di dimostrare il V postulato a partire dai primi quattro ed aveva già elaborato, agli inizi del secolo, una geometria non-euclidea; in una lettera del 1799 indirizzata a Farkas Bolyai scriveva, infatti:«[...] Tuttavia il cammino che ho scelto non porta affatto alla dimostrazione dell'assioma delle parallele. Esso sembra piuttosto obbligarmi a dubitare della verità della stessa geometria. Ad esempio, se potessimo dimostrare la possibilità dell'esistenza di un triangolo rettilineo la cui area sia maggiore di ogni area data, allora sarei pronto a provare tutta la geometria [euclidea] in maniera assolutamente rigorosa. La maggior parte delle persone accetterebbe questo fatto come assioma, ma io no!"» Ed in un'altra lettera del 1817 assumerà una posizione ancora più rivoluzionaria:« Mi sto convincendo sempre di più che la necessità fisica della nostra geometria non può essere dimostrata, almeno non dalla ragione umana, né per ragioni umane.» Egli non pubblica quanto già agli inizi del XIX secolo aveva scoperto di non-euclideo per timore di sfidare "le strida dei beoti" [B.7]. Ma chi erano questi beoti? Certamente Gauss non temeva la critica dei matematici, poiché tra i matematici era l'autorità indiscussa. Il problema era che questa ricerca sulla geometria andava a toccare campi d'interesse non prettamente matematici, coinvolgendo il concetto di spazio. Nel 1787 era stata pubblicata la Critica della Ragion Pura di Kant, dove tra l'altro si leggeva:«Tempo e spazio sono due sorgenti conoscitive, a cui è possibile attingere a priori svariate conoscenze sintetiche, delle quali ci offre un esempio la matematica pura, per quanto concerne la conoscenza dello spazio e dei suoi rapporti, che sono forme prime di tutte le intuizioni sensibili.» [B.8]

Questo sottolineare l'"a-priori" della geometria euclidea assomiglia troppo all'invocazione della "natura" di retta del Sacchèri. E può forse spiegare le resistenze a sbarazzarsi del pregiudizio matematico aristotelico: la geometria euclidea veniva difesa come un modello d'interpretazione dello spazio proprio di *ogni* intelligenza umana, e questo modello interpretativo è "più forte" dell'evidenza sensibile del geocentrismo. Le citate parole di Gauss contro la necessità della geometria euclidea paiono indirizzarsi polemicamente contro questa convinzione kantiana. Il superamento da parte dei matematici dell'ottica kantiana è poi, a mio avviso, divenuto fondamentale per quella che definirò la *frattura* tra il sapere scientifico e quello umanistico. E ciò può, forse, essere provato da due eventi contemporanei ai fatti in questione:

1) la comparsa della parola "scienziato", entrata in uso proprio all'inizio del secolo XIX, fino ad allora non si faceva distinzione verbale tra umanisti e scienziati, tutti venivano detti filosofi, sapienti o theologi;
2) l'avvento di una filosofia, di cui Hegel è stato l'iniziatore, onnicomprensiva, contenente *tutto* il sapere, compreso quello scientifico. E questa pretesa non poteva che allontanare dalla filosofia gli spiriti più autentici della scienza; per avere un esempio di ciò si legga questo passo tratto dalla Filosofia della Natura di Hegel: «Il *suono* [di cui qui Hegel tenta una definizione] è l'alternarsi del frazionamento specifico delle parti materiali e della negazione di quel frazionamento; - idealità soltanto astratta o, per così dire, soltanto ideale, di tale specificità. Ma questo alternarsi è esso stesso, immediatamente, la negazione della sussistenza materiale e specifica; e la negazione è quindi l'idealità reale del peso specifico e della coesione: il calore. Il riscaldarsi dei corpi sonanti, come di quelli percossi, ed anche di quelli soffregati l'un l'altro [B.9]».

[B.4] Si può forse notare che il tentativo di assiomatizzazione della geometria euclidea era già stato fatto da Giuseppe Peano, *Principii di geometria*, 1889, e da Giuseppe Veronese, *Fondamenti di geometria*, 1891, vedi in Kline, M., *Storia del pensiero matematico*, tr. it., Torino 1962, pp. 1179 e segg..
[B.5] L'editore milanese Ulrico Hoepli ha provveduto a ristampare l'originale del 1733: Sacchéri G., (a cura di Boccardini G.), *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae principia*, Milano 1904.
[B.6] Il lavoro del Sacchéri prende le mosse dal considerare un quadrilatero costruito da due coppie di segmenti paralleli i cui angoli di base sono supplementari, le possibilità che si pongono per i due angoli opposti è che abbiano somma superiore (ipotesi dell'angolo ottuso) o uguale (ipotesi dell'angolo retto) o inferiore (ipotesi dell'angolo acuto) a un angolo piatto; al proposito si ricordi che negli *Elementi* il postulato delle parallele ha la formulazione seguente: "Se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due rette, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti".
[B.7] I frammenti di lettera sono citati da Kline M., *op. cit.*, p. 1017 e segg..
[B.8] Da Chiodi P. (a cura di), *Il pensiero di Immanuel Kant*, Torino 1985.
[B.9] Citato in Popper K.R., *La società aperta e i suoi nemici*, vol II, *Hegel e Marx falsi profeti*, tr.it., Roma 1974, p.42.

• *Docente di Matematica, socio Mathesis, di Forlì*

Sulla media aritmetica

di Luciano Corso

Tutti sanno che la media aritmetica di una data variabile aleatoria è data dalle seguenti due formule:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i \quad o \quad M(X)=\int_{Dom} x\cdot f_X(x)\cdot dx \qquad (1)$$

ove la prima relazione vale nel discreto, la seconda nel continuo. Vi è però una relazione inusuale per il calcolo della media aritmetica di una v. a., ma potente come la relazione diretta e molto più generale. Tale espressione è data da:

$$M(X)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-F_X(x_j)\right]-\sum_{j=-\infty}^{0}F_X(x_j) \qquad (2)$$

$$M(X)=\int_{0}^{\infty}\left[1-F_X(x)\right]\cdot dx-\int_{-\infty}^{0}F_X(x)\cdot dx \qquad (3)$$

Sia in (1), sia in (2) e (3) è richiesto che vi sia in ogni caso convergenza ad un valore finito. Si provi a giustificare la ragione della validità delle due relazioni sopra riportate. Qui si prova, invece, a verificare empiricamente – attraverso un esempio - la validità delle relazioni (2) e (3): si consideri la variabile aleatoria X con la seguente densità di probabilità:

$$f_X(x)=2\cdot x-2 \qquad \{x : x\in \mathbf{R}, 1\le x\le 2\}$$
$$=0 \qquad altrove$$

La funzione di ripartizione si determina facilmente:

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\cdot dx = x^2-2\cdot x+1$$

e quindi:

$$F_X(x)=\begin{cases} x^2-2\cdot x+1 & 1\le x\le 2 \\ 0 & x<1 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

La media aritmetica, calcolata con la formula usuale (1), è data da

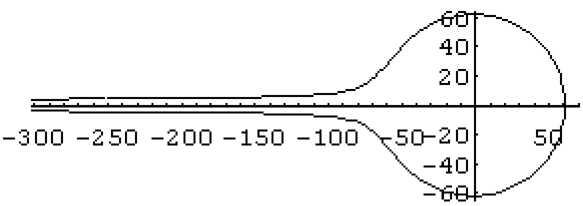
$$M(X)=\int_{x=-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\cdot dx=\int_{1}^{2} x\cdot(2\cdot x-2)\cdot dx=\frac{5}{3}$$

La media aritmetica calcolata con la formula (3) è data da:

$$M(X)=1+\int_{1}^{2}(-x+2\cdot x)\cdot dx+0-0=\frac{5}{3}.$$

Che è quanto si voleva far vedere.

Bibliografia: A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes, *Introduzione alla Statistica*, ed. McGraw-Hill, Milano, 1988



Ampolla di Luciano Corso - si veda MatematicaMente n. 23, novembre 1999