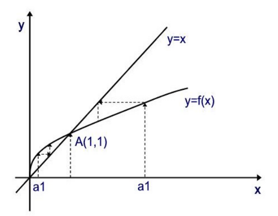
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 42 – giugno 2001



Matematica e scelte politiche

di Ivano Arcangeloni

1) Definizione del problema

Consideriamo un insieme X di "alternative accessibili" tra le quali una popolazione N è chiamata ad esprimere un ordine di preferenza. In modo formale: X è un insieme con cardinalità maggiore o uguale a 3 e finita, anche N è un insieme di cardinalità almeno 3, e comunque finita, in particolare se $|N|=n$, l'insieme si comporrà di n individui che indicheremo con 1, 2, .., i, .., n. Ogni individuo i esprime su X una *preferenza*, ovvero stabilisce tra gli elementi dell'insieme X una *relazione d'ordine largo e totale* che chiameremo P_i: P_i è un sottoinsieme di $X\times X$ con le note proprietà di riflessività, antisimmetria e transitività. La famiglia di tutte queste relazioni costituisce, se ogni individuo esprime *una* sola relazione di preferenza, un altro insieme sempre a cardinalità n, che denoteremo con W. Secondo la definizione di Arrow la *funzione del benessere sociale* (fbs) è una funzione f: $W^n\to W^*$ che associa alla n-upla $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ delle scelte degli individui di N, un'opportuna relazione R presa nell'insieme W^* che denota l'insieme di *tutte* le possibili relazioni di ordine largo e totale esprimibili sull'insieme X, è ovviamente: $W\subseteq W^*$ ovvero potrebbe esservi una relazione di ordine largo e totale su X che non è stata espressa da nessun elemento di N. La relazione $R=f(P_1, \ldots, P_n)$ è quella che esprime la *volontà della collettività*.

A questo punto il problema diventa di natura sociologica e politica, oltre che matematica: quale scelta esprime al meglio i *desiderata* di *tutta* la comunità?

Con Arrow il matematico si accontenta di due soli requisiti per caratterizzare una fbs:

p1) f sia *non-dittatoriale*, cioè **non** esista un unico i tale che $\forall x, y\in X, x P_i y\Rightarrow xRy$,

p2) valga il *principio di Pareto*, cioè: se

$\exists x,y\in X$, *tali che* $\forall i\in N, xP_i y\Rightarrow xRy$

ovvero, banalmente, in caso di unanimità, la scelta "sociale" deve coincidere con quella della totalità degli individui.

Ebbene il teorema di Arrow dimostra l'impossibilità di costruire una funzione che rispetti queste due proprietà, e queste soltanto!

2) Se Arrow avesse ragione…

Sia X l'insieme costituito dalle possibili alternative a premier del prossimo governo del nostro Paese: X={*Berlusconi, Bertinotti, Bonino, D'Antoni, Di Pietro, Rauti, Rutelli*}, ordinati in ordine alfabetico. Sia poi N l'insieme degli elettori italiani che il prossimo 13 maggio si recheranno alle urne, ovviamente N è finito, si indicherà poi con P_i la preferenza che il cittadino i esprimerà sull'insieme X, si richiede ad ogni i di esprimere su X una relazione d'ordine largo e totale (se i si rifiutasse di farlo, sarebbe meglio si astenesse dal votare!).

Il teorema di Arrow sostiene che *non* sarà possibile, a spoglio avvenuto, esprimere in X una *relazione di ordine largo e totale R* che rispetti la volontà *reale* dei cittadini, in particolare quindi è impossibile garantire, qualunque sia il sistema elettorale adottato, che la relazione R finale sia *non-dittatoriale e paretiana*, sempre nel casi in cui la scelta sia almeno fra *tre* candidati.

3) Dimostrazione (del fatto che Arrow ha ragione)

Per la dimostrazione è importante dare le definizioni di *insieme decisivo e quasi-decisivo*. Sia H un sottoinsieme di N, allora H si dice *decisivo* se $(\forall j\in H, xP_j y)\Rightarrow xRy$. Si definisce poi in modo automatico un sottoinsieme M di N come *"coalizione decisiva minima"* se M è decisivo e inoltre non esistono sottoinsiemi propri di M che siano decisivi. Importante poi la definizione di *quasi-decisività*, non ci si faccia trarre in inganno dal nome, la quasi-decisività, come si vedrà, è condizione più forte della decisività. Un sottoinsieme H di N si dice *"quasi-decisivo per a contro b"* se

$(\forall j\in H, aP_j b)\wedge(\forall i\in N-H, bP_i a)\Rightarrow aRb$.

Lemma (di espansione) Nella ipotesi che X abbia cardinalità maggiore o uguale a 3, se $H\subseteq N$ è quasi-decisivo per un certo a contro un certo b, allora H è decisivo.

Dim. i) H quasi decisivo per un certo a contro un certo b implica H decisivo per a contro $x\neq b$ si considera il seguente schema di preferenza:

$$\begin{array}{cc} H & N-H \\ a & b \\ b & a,x \\ x & a,x \end{array}$$

deve essere aRb per l'ipotesi fatta su H di quasi decisività; ora per il principio di Pareto, essendo $bP_j x$ per tutti i j di N, sarà anche bRx, quindi per la transitività: aRx,

ii) H decisivo per a contro x implica H decisivo su tutto X: sia y un generico elemento di X, si consideri il seguente ordine di preferenza:

$$\begin{array}{cc} H & N-H \\ y & y,x \\ a & y,x \\ x & a \end{array}$$

$aP_h x$ comporta aRx per la i), per la p2) si ha yRa, e per la transitività sarà infine yRx, e questo per la genericità di x e y comporta la dimostrazione della tesi.

Dim (del teorema) Per la proprietà p2) l'insieme N è decisivo, e quindi si può determinare un sottoinsieme decisivo minimo, sia M tale sottoinsieme di N, e sia h un elemento di M, consideriamo il seguente ordine di preferenza:

$$\begin{array}{ccc} h & M-\{h\} & N-M \\ x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{array}$$

(questo schema di preferenza è la generalizzazione al caso di n individui del più noto "paradosso di Condorcet", per le preferenze espresse da un insieme di tre individui), ora per la decisività di M, $\forall j \in M\ xP_jy \Rightarrow xRy$, ora se fosse anche xRz si avrebbe che h è quasi-decisivo e quindi decisivo contro l'ipotesi di minimo fatta su M, deve perciò essere $\boldsymbol{zRx}$, ragionando in modo analogo su y e z si addiviene alla conclusione che deve essere $\boldsymbol{yRz}$, se così non fosse ad essere quasi-decisivo, e quindi decisivo per il lemma di espansione, sarebbe $M-\{h\}$e anche questo sarebbe in contraddizione con l'ipotesi di minimalità fatta per M, ora per la transitività della R, $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ e cadiamo in altra contraddizione con la richiesta che sia zRx. In definitiva se la funzione di scelta sociale è "nondittatoriale" la R risulta non transitiva, viceversa la transitività di R comporta la dittatorialità della funzione.

4) CONCLUSIONI

La dimostrazione di impossibilità di Arrow si deve alle due ipotesi fatte di transitività (richiesta che nella teoria delle scelte sociali è decisamente più forte di quello che appaia in logica) e di scelta su almeno tre alternative: se la scelta fosse ristretta a due sole alternative non sarebbe possibile lo schema della dimostrazione, quello che ho detto essere una generalizzazione del paradosso di Condorcet, e produrre una "buona" funzione del benessere sociale sarebbe matematicamente decisamente più semplice, comunque possibile.

Ecco perché questa mi pare un'ottima dimostrazione matematica della preferibilità di un sistema maggioritario "all'americana": passando attraverso elezioni primarie vengono selezionati, sempre in schemi elettorali con due sole alternative offerte, i due "candidati migliori", a questo punto la popolazione è chiamata a scegliere tra queste due alternative "migliori". Passando attraverso un "setaccio dicotomico" che costringa *prima delle elezioni* gli elettori ad indicare i candidati preferiti, si ha la certezza matematica di andare a nominare premier il candidato che più di ogni altro rispecchia i gusti e le preferenze politiche degli elettori. Certo anche il sistema elettorale statunitense ha le sue pecche, anche lì, col meccanismo dei "grandi elettori", si è prodotta una funzione del benessere sociale che potrebbe essere migliorata.

Si potrebbe obiettare che di fatto anche in Italia la scelta si restringe alle due sole alternative di Berlusconi e Rutelli. A parte la discutibilità dell'affermazione – sono *due alternative*? Che dire poi dello schieramento composito che hanno alle spalle? – il meccanismo elettorale complesso che il nostro Paese si è dato, con l'abominio dello "scorporo" per le elezioni alla camera dei Deputati, e del "recupero dei resti" per il Senato, per non parlare della doppia scheda per la Camera, sembra studiato per rendere il "responso elettorale" il più lontano possibile da quella che potrebbe essere la volontà della collettività degli elettori, i quali comunque, lungi dal poter scegliere tra due sole alternative, possono esprimere su tre schede e su molteplici simboli di partiti politici, una quantità (certamente numerabile…) di scelte differenti, il calcolo delle quali potrebbe essere argomento di un prossimo intervento su Matematicamente…

Unioni e intersezioni su classi

di Ruggero Ferro

Date le classi $X_1, X_2,\dots X_n$, si sa cosa si intende per $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$. Ora se $X_1, X_2,\dots X_n$ sono insiemi, possiamo considerare l'insieme $X = \{ X_1, X_2,\dots X_n \}$, e possiamo indicare l'insieme $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ con la scrittura $\cap\{ X_1, X_2,\dots X_n \}$ oppure con $\cap X$. L'insieme $\cap X$ può essere descritto anche così: {x: $x \in Y$ per ogni elemento Y appartenente a X}, oppure, equivalentemente, anche così: {x: $x \in Y$ qualunque sia $Y \in X$}. Questo modo di descrivere $\cap X$ non richiede che X sia un insieme né che abbia un numero finito di elementi (anche se va bene anche in questo caso, come abbiamo appena visto), può lasciare qualche perplessità solo nel caso che X sia l'insieme vuoto. Possiamo osservare che se $X \subseteq X'$, con X e X' entrambi non vuoti, allora $\cap X \supseteq \cap X'$ (dimostrarlo per esercizio). Così, siccome $\emptyset \subseteq X$, per ogni insieme X, se si vuole mantenere il risultato dell'osservazione precedente, dovremmo affermare che $\cap\emptyset$ contiene ogni intersezione, in particolare le intersezioni dei tipo $\cap\{Y\}$, che danno proprio Y, e dunque contenere ogni insieme. Così sorge la proposta che $\cap\emptyset$ sia definita come la classe universale (che è una classe propria) che contiene ogni insieme. Ciò non contrasta con la definizione data di $\cap X$ nella forma {x: $x \in Y$ per ogni elemento Y appartenente a X} in quanto questa può essere riscritta equivalentemente così: {x: per ogni Y, se $Y \in X$ allora $x \in Y$}, e, con questa scrittura, con il modo usuale della matematica di interpretare una implicazione come vera se l'antecedente è falso, si dice che, se $X=\emptyset$ (e allora l'antecedente è falso perché niente appartiene a $\emptyset$), ogni elemento x può appartenere a $\cap\emptyset$. Inoltre lo sviluppo degli studi sugli insiemi ha mostrato che l'assumere che $\cap\emptyset$ sia la classe universale non porta a difficoltà ma solo a uniformare l'enunciazione di molti risultati non costringendo alla considerazione di casi particolari.

Pertanto estendendo le definizioni precedenti, in modo opportuno, per ogni classe X di insiemi definiremo $\cap X$ come {x: per ogni elemento Y appartenente a X, $x \in$ Y}. Se X non è l'insieme vuoto, chiaramente $\cap X \subseteq Y$ per ogni $Y \in X$, e, quindi, in tal caso, anche $\cap X$ è un insieme.

Analogamente, avevamo definito $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ ed, ancora, se $X_1, X_2,\dots X_n$, sono insiemi, possiamo considerare l'insieme $X = \{X_1, X_2,\dots X_n\}$ e possiamo indicare l'insieme $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ con la scrittura $\cup\{X_1, X_2,\dots X_n\}$ oppure con $\cup X$. L'insieme $\cup X$ può essere descritto anche così: {x: esiste un elemento Y appartenente a X tale che $x \in Y$}, oppure, equivalentemente, anche così: {x: $x \in Y$ per qualche $Y \in X$}. Questo modo di descrivere $\cup X$ non richiede che la classe X sia un insieme finito (anche se va bene anche in questo caso, come abbiamo appena visto), e neppure che sia un insieme, può lasciare qualche perplessità solo se che X è l'insieme vuoto.

Possiamo osservare che se $X \subseteq X'$,con X e X' entrambi non vuoti, allora $\cup X \subseteq \cup X'$ (dimostrarlo per esercizio). Così, siccome $\emptyset \subseteq X$, per ogni classe X, se si vuole mantenere il risultato dell'osservazione precedente, dovremmo affermare che $\cup\emptyset$ è contenuta in ogni unione, in particolare nelle unioni dei tipo $\cup\{Y\}$, che danno proprio Y, e dunque è contenuta in ogni insieme. Così sorge la proposta che $\cup\emptyset$ sia definita come l'insieme vuoto che è contenuto in ogni insieme. Ciò non contrasta con la definizione data di $\cup X$ nella forma {x: esiste un elemento Y appartenente a X tale che $x \in Y$} poiché con questa scrittura, si dice che, se $X=\emptyset$, nessun elemento x può appartenere a $\cup\emptyset$. Inoltre lo sviluppo degli studi sugli insiemi ha mostrato che l'assumere che $\cup\emptyset$ sia l'insieme vuoto non porta a difficoltà ma solo alla uniformazione dell'enunciazione di molti risultati non costringendo alla considerazione di casi particolari.

Pertanto, estendendo le definizioni precedenti in modo opportuno, qualunque sia la classe X di insiemi si definirà $\cup X$ come {x: esiste un elemento Y appartenente a X tale che $x \in$ Y}. Nel caso particolare che X sia la classe universale $\underline{U}$, $\cup\underline{U}$ è la classe {x: esiste un elemento Y di $\underline{U}$ tale che $x \in Y$}, cioè {x: esiste un insieme Y tale che $x \in Y$}; così, poiché per ogni elemento x si ha che {x} è un insieme, ogni elemento x appartiene a $\cup\underline{U}$ e $\cup\underline{U} = \underline{U}$, che è una classe propria. Così, in generale non si può dire se $\cup X$ è un insieme o una classe propria, tuttavia, in analogia con quanto convenuto per l'unione di insiemi, <u>se X è un insieme conveniamo che $\cup X$ sia un insieme</u>. Sostanzialmente l'idea è che un insieme sia un qualcosa di controllabile, e si vuol affermare che una unione controllabile di cose controllabili è ancora controllabile. $\cup X$ viene detto l'insieme unione sull'insieme X.