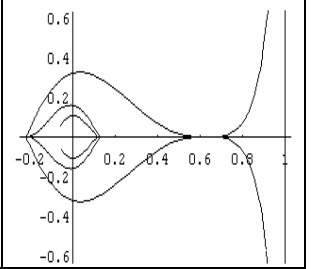


MatematicaMente

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 44 – agosto 2001

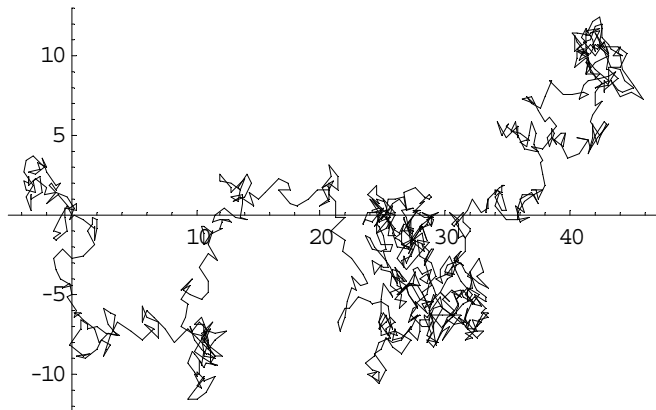


Simulazione di Random Walk

di Franco Nuzzi ⁽¹⁾

Il *random walk* (passeggiata aleatoria), così chiamato dal matematico ungherese George Polya (1887-1985), è senza dubbio uno degli argomenti più affascinanti della probabilità, non solo per gli aspetti teorici ma anche per le interessanti simulazioni che si possono avviare con i moderni computer.

Da un punto di vista storico esso affonda le sue radici nel moto disordinato, detto browniano, a cui sono soggette le particelle in sospensione acquosa risultando bombardate dall'agitazione caotica delle molecole di acqua. Tale fatto fu appunto scoperto al microscopio dal botanico scozzese Robert Brown e risultò successivamente come una delle prime prove sperimentali dell'esistenza delle molecole e quindi degli atomi.



In figura è riportata una semplice simulazione bidimensionale di un *random walk* costituito da 1000 passi, realizzata con l'uso del software MATHEMATICA. In questo caso il programma è alquanto semplice: partendo dall'origine degli assi, la posizione della particella viene determinata aggiungendo di volta in volta alle coordinate (x,y) dell'ultima posizione raggiunta due numeri *random* (*deltax* ; *deltay*) uniformemente distribuiti nell'intervallo $[-1; 1]$. Una leggera aggiunta di complessità consiste nel predisporre alcuni vincoli al movimento.

Consideriamo un *random walk* monodimensionale in cui una particella nella posizione $x=i$, possa saltare con eguale probabilità $p=1/2$ in $x=i-1$ o $x=i+1$. Le restrizioni siano ora che nel punto di partenza $A(x=0)$ ci sia una barriera riflettente mentre, nel punto $N(x= n)$, si abbia una barriera assorbente, dovendosi qui il moto necessariamente arrestare. Riflettente significa che se la particella arriva in A essa sarà forzata al punto $B(x=1)$ al passo successivo. È possibile ora dimostrare due fatti importanti. Il primo è che la particella, dopo essere partita, raggiungerà sicuramente il punto N (con probabilità $p=1$). Sia infatti $P(i)$ la probabilità che la particella ha di raggiungere $x=i$, essendo $P(0)=1$ perché in A avviene certamente la partenza. Ora poiché vi sono solo due modi per arrivare a $x=i$: o da $x= i -1$ o da $x= i +1$, la probabilità di raggiungere la posizione i , ovvero $P(i)$, è data dalla seguente equazione ricorsiva: $P(i)= (1/2) \cdot P(i -1) + (1/2) \cdot P(i +1)$. Allora è facile vedere che $P(i)=1$ per ogni i , cioè è certo che la particella raggiungerà il punto N dove sarà assorbita.

La seconda questione che si può dimostrare è che, se si considera una distanza AN costituita da n passi, ci vorranno

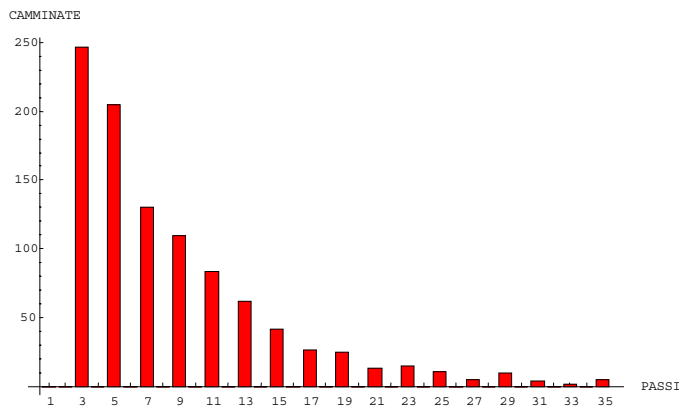
mediamente n^2 passi affinché la particella raggiunga il punto assorbente N . Sia infatti J_k il numero di salti per andare da $x= k$ a $x=k+1$. Questi J_k sono anch'essi delle variabili *random* ciascuna delle quali con un certo valor medio indicato con $e_k= E(J_k)$. Per andare da A fino a N siano necessari un totale di J passi cioè $J=\sum_{k=0}^{n-1} J_k$. Perciò $E(J)=E(J_0)+\dots+E(J_{n-1}) = e_0 + \dots + e_{n-1}$. D'altra parte è possibile stimare i J_k : se la particella si trova in $x=k$ essa può portarsi in $x=k+1$ in un solo passo con $p=1/2$, oppure può muoversi indietro di un passo nella posizione $x=k-1$ per poi ritornare a $x=k$ (con J_{k-1} salti) e infine a $x=k+1$ con J_k salti. Quindi in quest'ultimo caso si avrà:

$$J_k=1+ J_{k-1}+ J_k \text{ sempre con } p=1/2.$$

Prendendo il valor medio si ha: $E(J_k) = (1/2) \cdot E(1) + (1/2) \cdot E(1+ J_{k-1}+ J_k) = 1/2 + 1/2 + (1/2) \cdot E(J_{k-1}) + (1/2) \cdot E(J_k)$. Ricordando che $e_k=E(J_k)$, si perviene quindi alla seguente equazione ricorsiva $e_k= 2 + e_{k-1}$. Ora, poiché in A c'è la barriera riflettente, si ha che $e_0=1$ in quanto la particella se va in $x=0$ salta sempre a $x=1$ con un passo.

Valutiamo il valor medio totale $E(J) = e_0 + e_1 + e_2 \dots e_{n-1} = 1 + (2 + e_0) + (2 + e_1) + \dots + (2 + e_{n-2}) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$. Ma quest'ultima è la somma dei primi n dispari ed è uguale a n^2 . Pertanto il numero medio dei salti fatti dalla particella prima di essere assorbita in $N(x=n)$ è uguale al quadrato della distanza fra le due barriere, n^2 .

Per verificare tale risultato consideriamo un cammino monodimensionale di lunghezza $n=3$ da $x=1$ fino a $x=4$, lungo il quale simulare al computer la passeggiata aleatoria. Il programma conta il numero dei passi necessari per completare una passeggiata aleatoria.



È possibile, inoltre, selezionare il numero delle camminate e iterare il processo per ottenere infine il valor medio $E(J)$ del numero totale dei passi. Nel caso di $c=500$ camminate si è ricavato un valore di 9,002 mentre per $c=1.500$ un valore di 8,84, risultati in buono accordo con il risultato teorico di $3^2=9$. In figura è riportato (per $c=1.000$) il grafico del numero di camminate in funzione del numero totale dei passi necessari per completare ciascuna di esse. Ad esempio il punto $(5,207)$ indica che ci sono state 207 camminate con un numero totale di 5 passi.

(1) Liceo Q.O. Flacco – Bari

Aforisma: Se siete interrogati sull'infinito, rispondete che è un **otto disteso**; se chiedono ulteriori dettagli, parlate solo in presenza di un avvocato.

Questioni di Termodinamica

Luigi Marigo

Il teorema di Clausius recita: “se un sistema compie una trasformazione ciclica scambiando i calori Q_i con termostati a temperature T_i , allora è

$$\sum_i Q_i/T_i \leq 0, \quad (1)$$

valendo l'uguaglianza se il ciclo è reversibile”. Se le temperature dei termostati sono distribuite con continuità, allora la sommatoria è sostituita dall'integrale curvilineo

$$\oint dQ/T \leq 0 \quad (2)$$

Sia ora un ciclo reversibile costituito da una trasformazione da A a B lungo il cammino (1), poi da B a A lungo il cammino (2): si deduce immediatamente l'uguaglianza

$$(1) \int_A^B dQ/T = (2) \int_A^B dQ/T \quad (3)$$

che ci permette di definire la funzione di stato « entropia »

$$S(A) = S(O) + \int_O^A dQ/T \quad (4)$$

ove O è uno stato di riferimento, la cui entropia è convenzionalmente assegnata, e l'integrale è computato lungo una trasformazione reversibile.

Sia infine una trasformazione ciclica, irreversibile da A a B , e reversibile da B ad A : si dimostra ancora, facilmente, che è

$$IRR \int_A^B dQ/T \leq REV \int_A^B dQ/T = S(B) - S(A) \quad (5)$$

per cui, se il sistema è isolato, essendo $dQ = 0$ nella trasformazione irreversibile, allora è $0 \leq S(B) - S(A)$: l'entropia di un sistema isolato non può diminuire. Esponevo questi argomenti, generalmente noti, durante un seminario di Mathesis; mi furono poste molte domande e mi pare utile riportare qui la risposta data a una di esse: perché si pone $dQ = 0$ nella trasformazione irreversibile, ma non in quella reversibile?

La risposta è sostanzialmente questa: nella trasformazione irreversibile dQ è un calore effettivamente scambiato, in quella reversibile, che per essere tale deve durare un tempo infinito, non è tanto dQ ad avere un preciso significato, quanto $dS = dQ/T$ che è differenziale esatto, variazione infinitesima di una quantità. Ci fu una obiezione: se vi sono difficoltà interpretative in termini di dQ perché non le eliminiamo, scrivendo, in base al I° principio (indipendente dal II°): $dQ/T = (dU + p \cdot dV)/T$? Dove sta la differenza tra destra e sinistra nella (5)? Bisogna ricordare che nel teorema di Clausius con T si intendono le temperature dei termostati, che nella trasformazione irreversibile non coincidono con quella del sistema, poiché vi è un salto finito di temperatura tra sistema e termostati; per lo stesso motivo p è la pressione esterna e non quella del sistema; a destra invece, per la reversibilità e per il conseguente equilibrio tra ambiente e sistema, p e T sono quelle del sistema, e pertanto variabili di stato. La discussione fu lunga e interessante.

I radicali algebrici non dovrebbero esistere poiché non esistono i logaritmi dei numeri negativi

di Luigi Landra ⁽²⁾

I radicali algebrici non dovrebbero esistere poiché non esistono i logaritmi dei numeri negativi. Per il principio di dualità non possono necessariamente esistere potenze con base negativa e, di conseguenza, radici negative, non esistendo appunto i logaritmi di numeri negativi. In conclusione, non ha senso considerare i radicali algebrici.

Però, con la definizione secondo la quale si dice logaritmo

di un numero in R l'esponente, sempre in R , che si deve dare alla base in R , per ottenere il numero dato, è evidente che, per esempio, ha significato anche la scrittura: $\log_{-3} -27 = 3$, essendo $(-3)^3 = -27$.

Così facendo si accettano anche i logaritmi dei numeri negativi, contrariamente alle correnti convenzioni ammesse tra i cultori di matematica.

Possiamo inoltre constatare che $\log_{-3} 9 = 2$ poiché $(-3)^2 = 9$. Ma 2 è anche il logaritmo di $\log_3 9$, poiché $3^2 = 9$. Dunque, con questa convenzione, due espressioni logaritmiche con basi rappresentate da numeri opposti, hanno lo stesso logaritmo, così come una radice con indice pari (per esempio, $\sqrt{4}$) ha come risultato due numeri opposti (± 2).

Conseguenza della definizione sopra enunciata è che i logaritmi pari, con base sia positiva che negativa, sono associati ad un numero positivo mentre i corrispondenti numeri opposti non possono essere associati a nessuna espressione logaritmica, come del resto, una potenza con esponente pari non può mai essere negativa. Cambiando in questo modo le convenzioni si mette dunque in evidenza che possono esistere dei numeri che, in R , non possono essere originati da nessuna espressione logaritmica.

Per i radicali pari si conviene correntemente di chiamare i la $\sqrt{-1}$. Ne viene di conseguenza che con $i^2 = -1$, dal campo dei numeri complessi si ritorna nel campo dei numeri reali. In tal modo le complicate formule di risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, a suo tempo opera dei cosiddetti algebristi del '500 (Gerolamo Cardano, Scipione Dal Ferro, Niccolò Fontana detto Tartaglia, Ludovico Ferrari, Raffaele Bombelli), hanno validità per tutte le equazioni nel campo dei numeri reali oltre che naturalmente nel campo dei numeri complessi.

Penso che, in ricerche nell'ambito della matematica pura, non si debba porre alcun limite ai possibili calcoli, per non discriminare senza giustificazione dei risultati semplicemente perché ancora non se ne conosce una significativa utilizzazione pratica.

Perciò non si capisce perché si devono considerare senza significato i risultati di espressioni algebriche che sono coerenti con le regole di calcolo introdotte. È soltanto la risoluzione di un problema concreto che ci può porre delle significative limitazioni ai calcoli. In tal modo si evita di formulare delle importanti eccezioni come, per esempio, lo è l'*artificio mnemonico*, così come è stato definito da Barlotti [1], secondo il quale si può tollerare l'utilizzazione dell'usuale formula risolutiva delle equazioni algebriche di secondo grado $[x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2]$ anche se, come afferma nel suo articolo, alla scrittura $\sqrt[n]{a}$ in C non si dovrebbe assegnare alcun significato.

Ogni anno, nel mondo, viene dimostrato dai matematici un notevole numero di nuovi teoremi che, nella stragrande maggioranza dei casi, non hanno alcuna relazione con questioni pratiche. Questi lavori possono essere utilissimi in futuro se opportunamente si classificano e si mettono a disposizione di studiosi che, dovendo invece risolvere problemi che hanno qualche attinenza con la realtà, si troveranno enormemente facilitati nella loro fatica se alcune questioni teoriche saranno state chiarite, come già, del resto, ciò si è verificato abbondantemente nel passato.

Bibliografia: [1] Marco Barlotti, I radicali algebrici non esistono, in “Periodico di matematiche”, Mathesis, Roma, n. 2 – aprile/giugno 1999

(2) *Presidente della sezione di Seregno (MI) della Mathesis*

Un libro da leggere

Secondo quanto espresso da Lucio Russo nel libro “La rivoluzione dimenticata”, edizioni Feltrinelli, Milano, 2001, il periodo ellenistico (dal 324 a.C. al 30 a.C.) fu importante nella storia della scienza perché coincise con uno sviluppo straordinario del pensiero scientifico e tecnologico. Come è noto, il metodo scientifico moderno si basa sul criterio dimostrativo e sul criterio sperimentale: questi due criteri furono usati abbondantemente da gran parte degli scienziati del periodo ellenistico. In particolare da Archimede i cui frammenti pervenuti e conservati manifestano una genialità unica.