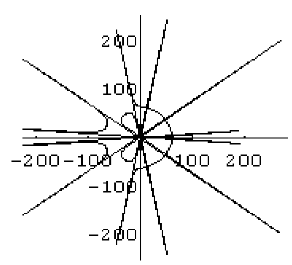
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 45 – settembre 2001



About the polarized mutually associative hypergroups

di Luigi Cerritelli*

Abstract

A class of mutually associative hyperstructures, is constructed with a particular procedure.

1. The polarized hypergroups with respect to a subset

Let be U a support set and $< +^A >$ the hyperoperation on U given by the position

$\forall$ x, y $\in$ U, $x +^A y = \{x, y\} \cup A$ (1)

where $A \subset U$ is a not empty subset of U, called the polar class of the hyperoperation (1). We observe, at once, that it's a commutative hyperoperation. Moreover it is also associative. In fact, we have, $\forall$ x, y, z$\in$A,

$(x+^Ay)+^Az=\{\{x,y\}\cup A\} +^Az =\{x,y,z\}\cup A$ (2)

$x+^A(y+^Az)=x +^A\{\{y,z\}\cup A\}=\{x,y,z\}\cup A$ (3)

and the equality of subsets (2) and (3) is proved. The hyperoperation (1) is subordinate to the property of reproducibility, according with Corsini [R2]&[R3], wich, for the commutative hypergrupoids, is described with the position

$\forall$ x, y $\in$ U, $\exists$ u $\in$U; $y\in x+^Au$. (4)

In fact this property is checked for u=y and $\forall$y $\in$A. The hypergroupoid

$(U,< +^A >)$ (5)

turns out to be a commutative hypergroup. It's said a polarized hypergroup with respect to the subset A contained inside the support set U.

2.The mutually associative hyperstructures

Let H a set and let be ,< + > and < $\circ$ >, two hyperoperations on it.

DEFINITION. The previous hyperoperations are said mutually associative hyperoperations, according with Corsini [R3], if $\forall$ x, y, z$\in$H we have

$(x + y) \circ z = x + (y \circ z)$

$(x \circ y) + z = x \circ (y + z)$.

DEFINITION. The hyperstrucures

(H, < + >),(H, < $\circ$ >)

are said mutually associative if their hiperoperations are mutually associative.

3. A class of mutually associative hypergroups

Let be the class of polarized hypergroups with respect to not empty subsets $A(i)\subset U$, on the support set U

$F = \{(U,<+^{A(i)}>)\}, i\in N_o, A(i) \subset U$. (6)

We chose into the class two hypergroups

$(U,<+^{A(i)}>)$, $(U,<+^{A(k)}>)$, i$\neq$k, (i, k)$\in N_0$ (7)

which are polarized with respect to the subsets A(i) and A(k) of U.

PROPOSITION. The hypergroups (7) are mutually associative.

PROOF. We observe the consistency,$\forall$(x,y,z)$\in U^3$, of the subsets

$(x+^{A(i)}y) +^{A(k)} z$

$x+^{A(i)} (y+^{A(k)} z)$

$(x +^{A(k)}y)+^{A(i)} z$

$x+^{A(k)}(y+^{A(i)} z)$.

These subsets coincide with $\{x, y, z\}\cup A(i)\cup A(k)$.We can deduce that the two hyperoperations of (7) are mutually associative, according with Corsini [R3].

If n is the cardinality of U, the number of not empty subsets of U, not equal to U himself, is valued $N= 2^n-2$.

Therefore the number of all the couple of polarized distinct hypergroups, is $N'=(2^n - 2)^2 - (2^n - 2)$.

We conclude that this number is the number of all couples of polarized mutually associative hypergroups which we can take out the class (6).

References: [R1] L. Cerritelli, F. Eugeni, Algebra non standard e didattica delle iperstrutture, Atti del Convegno Mathesis di Teramo, 1999. **[R2] P. Corsini**, Prolegomena of Hypergroup Theory, 2nd ed., Aviani Editore, Udine, 1992. **[R3] P. Corsini**, Mutually associative hypergroupoids, Sixth Int. Congress of AHA (1996), 25-33, Democritus Univ. of Thrace Press.

* *Liceo-Ginnasio Arnaldo, Brescia – Consigliere nazionale Mathesis*

Fondatezza formalizzata e assioma della scelta

di Ruggero Ferro

Si è già osservato che, nonostante la vaghezza nella formulazione della fondatezza, da questa si può concludere che un insieme non può appartenere a se stesso. Ma si può ottenere di più: si può anche affermare che non esistono cicli di appartenenza, cioè non esistono insiemi a_1, a_2, ... , a_n tali che il primo appartenga al secondo, il secondo al terzo, ... , il penultimo all'ultimo e questo al primo, $a_1\in a_2\in \ldots \in a_n\in a_1$. Infatti, se così fosse, non si potrebbe conoscere a_1 se prima non si conoscesse a_n e non si potrebbe conoscere a_n se prima non si conoscesse a_{n-1}, ..., e non si potrebbe conoscere a_2 se prima non si conoscesse a_1, sicché infine non si potrebbe conoscere a_1 senza conoscere a_1 stesso, ma ciò viola la fondatezza. Inoltre non vorremmo avere catene infinite discendenti di appartenenza, cioè successioni infinite di insiemi a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, …tali che $\ldots\in a_{n+1}\in a_n\in \ldots \in a_1\in a_0$, ancora perché così non si saprebbe quali sono gli elementi di una classe.

Le conseguenze viste della vaga proprietà di fondatezza sono conseguenze anche della seguente proprietà: ogni insieme non vuoto (più in generale, classe non vuota) X ha un elemento a che è disgiunto da (cioè ha intersezione vuota con) ogni altro elemento y dell'insieme (della classe). Questa può essere formulata anche così: per ogni X diverso dall'insieme vuoto (classe vuota) esiste un a tale che $a\in$X e per ogni y, se

$y \in X$ e $y \neq a$, allora $a \cap y = \emptyset$. Tra gli elementi dell'insieme (classe) X un tale insieme *a* può essere considerato come minimale rispetto all'appartenenza. Assumeremo questa proprietà come versione non vaga della fondatezza, chiamiamola <u>fondatezza formalizzata</u>. Si può utilizzare la fondatezza formalizzata al posto della fondatezza vaga per caratterizzare le nozioni di classe e di insieme che stiamo cercando di presentare.

Ma anche accettando la fondatezza formalizzata, non si sono risolti tutti i problemi relativi a «cosa si debba intendere per conoscere un elemento». Potremmo non curarci troppo di questi problemi, se non avessero effetto sulla possibilità di accettare o meno classi che si dimostrano importanti nello studio della matematica, possibilità lasciata impregiudicata dalle altre assunzioni fatte sulle nozioni di classe e di insieme. Così, invece di precisare in generale cosa si debba intendere per conoscere un elemento, cerchiamo piuttosto di esaminare i casi che ci interessano e, per essi, decidere come comportarsi.

Un caso di particolare interesse è il seguente. Si supponga di avere una classe A di insiemi S non vuoti, si vorrebbe considerare una classe X costituita da vari elementi e precisamente uno e un solo elemento *s* per ogni S appartenente ad A. Ovviamente se c'è almeno una tale classe, e qualche elemento S di A ha più di un elemento, non è unica la classe che soddisfa la condizione sopra esplicitata. Inoltre, se c'è un criterio che permetta di scegliere un elemento da ciascuna classe, questo criterio permette di indicare la classe X sfruttando i metodi già visti, e in questo caso non c'è problema. Così, ad esempio, se gli insiemi S sono finiti, si può definire un ordine tra gli elementi di ciascun insieme S e scegliere un elemento *s* in base all'ordine introdotto, potrebbe essere il primo (o l'ultimo. o qualche altro ben precisato) e così ottenere una classe X - come si voleva - sfruttando le assunzioni già fatte. Il problema diventa grave quando gli insiemi S sono molto vasti e non si riesce a precisare un criterio per individuare un elemento in ciascun insieme S. In qualche modo, più sono grandi gli insiemi S, più dovrebbe essere facile (essendoci più modi di soddisfare la richiesta) esibire un tale insieme X; ma se gli elementi degli S sono troppi diventa difficile precisarne uno per ciascun S: si potrebbe dire troppa grazia.

Precisando in questa situazione l'idea che non si volevano porre limiti al modo di conoscere, possiamo convenire di chiarire ulteriormente la nostra idea di classe con la seguente assunzione: data una classe A di insiemi non vuoti, esiste sempre almeno una classe X costituita da elementi scelti ciascuno da un insieme appartenente ad A, con elementi diversi di X scelti da elementi diversi di A. Questa assunzione va sotto il nome di <u>assioma della scelta</u>, e non segue dalle altre assunzioni fatte finora.

Si osservi che se A è un insieme, anche la classe X è un insieme perché ovviamente X ha tanti elementi quanti quelli di A, sicché quanto affermato è conseguenza dell'assunzione già fatta sulle classi che hanno tanti elementi quanti quelli di un insieme. Ci limiteremo a questo caso particolare perché altri di interesse si riconducono a questo, anzi spesso sono equivalenti ad esso.

Le classi che considereremo saranno quasi sempre insiemi. D'ora in poi useremo per esse la parola insieme (e non classe), fuorché quando vorremo sottolineare la differenza tra classi e insiemi. Riassumendo, questa differenza tra classi e insiemi è la seguente: il concetto di insieme indica una classe che può essere considerata come una cosa singola.

Ma a causa dell'impossibilità di precisare quali classi possono essere considerate come cosa singola, si è poi optato per una nozione matematica di insieme un po' diversa: così si è stabilito che, dal punto di vista matematico, un insieme sia un qualcosa di ottenibile mediante gli assiomi finora proposti. Questa pattuizione è giustificata dal fatto che gli assiomi proposti sono proprio stati scelti in modo che conducano a classi (forse non tutte) che dovrebbe essere possibile considerare come cose singole senza che ciò porti a contraddizioni. Si noti che gli assiomi presentati non sono sufficienti (come è stato dimostrato a partire dai lavori di Gödel e Cohen) per dedurre la verità o meno su una qualsiasi affermazione sugli insiemi, e perciò non possono caratterizzare un'unica collezione di enti, ma sono adatti per basare lo sviluppo di una teoria matematica che colga al meglio il concetto di insieme come classe considerabile come cosa singola.

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

Congresso Nazionale 2001

Tema:

Per una nuova scuola: programmi, formazione e tecnologie innovative per l'insegnamento della matematica

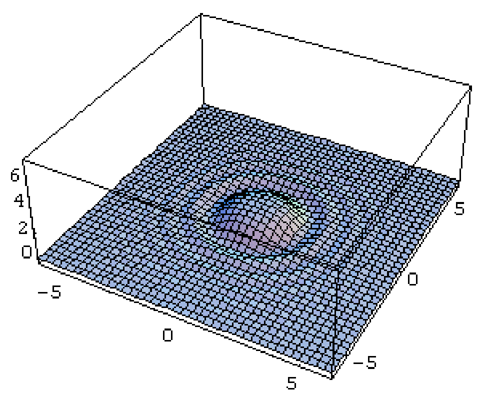
Mantova

Teatrino scientifico del Bibiena, Via Accademia 47
Succursale del Politecnico di Milano – Via Scarsellini 15

23, 24, 25 novembre 2001

Le necessarie informazioni sono sul sito della Mathesis nazionale
www.mathesisnazionale.it
oppure, per informazioni veramente urgenti ci si può rivolgere a Fabio Mercanti,
e-mail: fabio.mercanti@polimi.it,
tel. 02-23995119, 335-7793114
o a Gabriele Lucchini,
e-mail: Gabriele.Lucchini@mat.unimi.it,
tel. 02-58356128.

È previsto l'esonero ministeriale per il personale ispettivo, direttivo e docente delle scuole di ogni ordine e grado che parteciperà al Congresso.



Rappresentazione grafica della funzione $z=(\sin(x^2+y^2)) / (x^2+y^2)$, nel dominio $\{x,-2\pi, 2\pi\}$ e $\{y,-2\pi, 2\pi\}$. *Programma: MATHEMATICA*