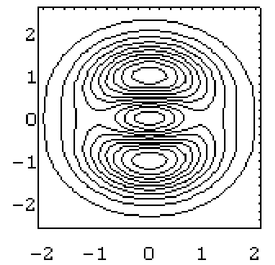
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 46 – ottobre 2001



La logica *Fuzzy* e la probabilità

di Luciano Corso

Introduzione

Il termine inglese *fuzzy* ha i seguenti equivalenti significati italiani: confuso, indistinto, vago, sfumato, sfuocato. Considererò per me valido il significato di vago e a partire da questo momento userò questo termine, come traduttore della parola *fuzzy*.

La teoria *fuzzy* non è recente (1965 Kadeh), tuttavia è poco conosciuta al pubblico dei matematici classici. Spesso la si considera come una variante del calcolo delle probabilità o, anche, un altro modo di interpretare la probabilità di eventi. In realtà non è così. Cercherò di porre in risalto il modello matematico della logica *fuzzy*, il significato di *fuzzy* e le differenze sostanziali che intercorrono tra la teoria dei *fuzzy-set* (insiemi vaghi) e il calcolo delle probabilità.

Spesso quando si fa riferimento ad attributi relativi a certi caratteri statistici ci si trova di fronte a delle difficoltà di attribuzione di queste peculiarità agli oggetti investigati. Per esempio, se con riferimento ad una popolazione studentesca di una scuola prendiamo in considerazione l'attributo «sveglio» non sappiamo poi più assegnare a ciascun studente la modalità considerata senza incorrere in un mare di indeterminazioni. Infatti, quando possiamo assegnare a qualcuno l'attributo «sveglio» o il suo complementare «non sveglio»? Vi sono diversi livelli di vivacità mentale e non è possibile semplificare l'attribuzione della modalità con il classico metodo dicotomico. L'essere sveglio, cioè avere vivacità mentale, come moltissimi altri attributi di matrice scientifica, è una entità vaga. Si possono fare molti altri esempi di assegnazioni vaghe. L'essere sano, per esempio, o l'essere vecchio e così via.

La logica classica si basa sul principio dicotomico, cioè sull'idea che dato un enunciato esso o è vero o è falso, *tertium non datur*. Il grado di verità associato ad ogni enunciato può, perciò, assumere soltanto due valori: «È falso»=0 o «È vero»=1. Assegnazioni vaghe non possono esistere in logica classica; nel senso che se k è uno studente appartenente al gruppo considerato, esso può solo essere o sveglio oppure no. La logica *fuzzy* tenta un approccio nuovo alla logica matematica, cercando di trovare un significato anche ad enunciati cui non sia propriamente riferibile in modo diretto un valore netto di verità 0 o 1.

Il modello matematico della logica *fuzzy*

Consideriamo un insieme $U \neq \emptyset$ e supponiamo che esso sia costituito da oggetti investigabili rispetto ad un attributo che essi possono avere oppure no. Si ipotizza, in sostanza, la possibilità che esista una funzione $A: U \rightarrow X$ e, corrispondentemente, una funzione $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$; ove $[0,1]$ è l'intervallo dei numeri reali. A rappresenta una data proprietà e per ogni $k \in U$, $0 \leq \mu_A(x_k) \leq 1$; se $\mu_A(x_k)=0$, k non possiede l'attributo considerato; se $\mu_A(x_k)=1$, k lo possiede. In ogni altro caso si è in presenza di un elemento $k \in X$ con caratteristiche di vaghezza rispetto alla proprietà (funzione) A. Il sotto insieme degli elementi di U che hanno $0 < \mu_A(x_k) < 1$ formano l'insieme vago X. Occorre notare che mentre A è un selettore di elementi di U, per cui l'insieme dei k elementi selezionati da A forma un sotto insieme X, $\mu_A(x_k)$ è una misura dell'appartenenza di k ad X. In genere si tende a distinguere i due momenti, per cui A seleziona gli oggetti del *fuzzy-set* e $\mu_A(x_k)$ ne misura il livello di definizione rispetto alla proprietà A. La funzione A è detta funzione di appartenenza, mentre $\mu_A(x_k)$ è detto grado di appartenenza di k a X.

Lo spazio $\{U, A, \mu_A\}$, anche se apparentemente ne può sembrare una variante, non corrispondente allo spazio probabilizzato $\{\Omega, B, P\}$ e assume un significato del tutto diverso. Anche nell'esempio sopra riportato il senso dell'avere vivacità mentale è sostanzialmente diverso dalla probabilità di trovare un giovane k di U che abbia «vivacità mentale».

La struttura algebrica (U, A, μ_A) è un reticolo e quindi gode di tutte le proprietà dei reticoli.

Vediamo ora come deve essere applicato il modello ad un esempio concreto.

Applicazione

Riprendiamo l'esempio sopra citato per vedere come affrontare un problema con logica *fuzzy*. Consideriamo un insieme di studenti U appartenenti ad una data scuola. Vogliamo classificarli in base alla loro vivacità mentale. Allora A= «*…è vivace mentalmente e quindi appartiene a…*» è la funzione di appartenenza che porta $k \in U$ in $k \in X$ ove $X \subseteq U$. Per far ciò occorre definire un criterio in grado di definire quando $k \in X$ e soprattutto il grado di appartenenza μ_A di k ad X. Consideriamo un test di 16 quesiti di tipo dicotomico (sì o no) e conveniamo di decidere nel modo seguente: se uno studente risponde in modo corretto a meno di 5 domande non è vivace mentalmente; se invece risponde a un numero di quesiti compreso tra i 5 e 12 ha un qualche livello di vivacità mentale e tale livello nell'intervallo considerato cresce linearmente; se, infine, lo studente risponde a più di 12 domande, lo studente è decisamente vivace mentalmente. In base a quanto esposto riusciamo subito a costruire in modo formale una funzione di appartenenza adeguata al problema; si ha:

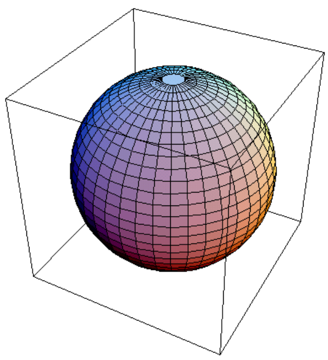
$$\mu_A : U \rightarrow \begin{cases} 0 & 0 \leq x_k \leq 4 \quad e \quad x \in R^+ \\ \dfrac{1}{8} \cdot x_k - \dfrac{1}{2} & 4 < x_k \leq 12 \quad e \quad x \in R^+ \\ 1 & 12 < x_k \quad e \quad x \in R^+ \end{cases}$$

La funzione A riesce a selezionare su U l'insieme di elementi *fuzzy X*, univocamente determinati da μ_A (nel senso che quando il selettore A identifica un k di U con $0 < \mu_A(x_k) < 1$, lo attribuisce a X). Consideriamo lo studente $k \in U$ e siano $x_k=10$ le risposte esatte date dal k-esimo studente ai 16 quesiti proposti. In base alla funzione μ_A si ottiene $\mu_A(x_k)=6/8$ e questo valore misura il grado di appartenenza di k ad X. Nella terminologia *fuzzy*, si chiamano elementi puri (o netti – l'equivalente inglese è il nome *crisp*) quelli che hanno una misura del grado di appartenenza pari a $\mu_A = 0$ oppure $\mu_A = 1$.

La differenza con la probabilità

I sostenitori della teoria *fuzzy*, affermano che essa si differenzia consistentemente dalla teoria della probabilità. Se è vero che il grado di appartenenza è una misura normalizzata, come la probabilità di un evento, è altrettanto vero che esso si riferisce a problemi e concetti che nulla hanno a che vedere con l'idea di incerto, fondamento del calcolo delle probabilità. In effetti il grado di appartenenza ad un insieme non ha alcun riferimento alla probabilità di appartenervi. Se, infatti, si afferma che $k \in X$ è perché $0 < \mu_A(x_k) < 1$; misurare il grado di affidabilità di questa dichiarazione è altra cosa. L'idea che domina il concetto di *fuzzy-set* è che vi possono essere molti elementi che appartengono ad un insieme X con diverse sfumature di appartenenza. Con riferimento all'esempio, chiediamoci ora qual è la $P(k \in X)$. Osserviamo che μ_A non è una funzione di ripartizione; infatti il significato probabilistico dell'enunciato $F(x_k) = P(X \leq x_k) = 6/8$ corrisponderebbe alla probabilità di pescare a caso uno studente k di U con vivacità mentale minore o uguale a x_k, cosa concettualmente diversa dalla misura della vivacità mentale di uno studente k che ha risposto a 10 domande su 16. D'altra parte, l'enunciato $P(k \in X)$ chiede di misurare l'affidabilità dell'affermazione $k \in X$. Tale misura, in ipotesi di equidistribuzione, è pari a: $|X| / |U|$, ove $|X|$ e $|U|$ sono rispettivamente le cardinalità degli insiemi X e U.

Bibliografia: D. Dumitrescu, B. Lazzerini, L.C. Jain, *Fuzzy set and their application to clustering and training*, CRC press, London, 2000 – Hung T. Nguyen, Elbert A. Walker, *A first course in Fuzzy Logic*, Chapman & Hall/CRC, London, 2000



La freccia del tempo

di Paolo Di Sia

La fisica riconosce nell'universo un'asimmetria tra passato e futuro, che è determinata dalla seconda legge della termodinamica. Esaminando però la materia a livello atomico, l'origine dell'asimmetria temporale appare essere un mistero; infatti il processo di collisione di due molecole qualunque è totalmente reversibile e non rivela orientamenti preferenziali verso il futuro o il passato. Questo problema, detto della "freccia del tempo", ha interessato molti fisici e non solo; tra questi ricordiamo Ludwig Boltzmann, il quale per primo ha cercato di definirlo in maniera chiara. Tale questione rimane ancor oggi aperta.

Anche se abbiamo l'impressione dello scorrere sempre in avanti del tempo, nelle leggi del moto, sia meccaniche che elettromagnetiche, ad esempio, nulla differenzia il tempo che avanza da quello che scorre all'indietro. Solo considerando grandi quantità di particelle, si nota con evidenza la freccia del tempo.

Consideriamo un sistema; il secondo principio della termodinamica descrive una grandezza, chiamata *entropia*, che aumenta oppure rimane costante ed è legata al grado di disordine del sistema. A livello globale, ogni volta che avviene una reazione, l'entropia cresce così come aumenta sempre il tempo.

Non solo nel campo della termodinamica, ma anche a livello cosmologico si può denotare la freccia del tempo nell'espansione dell'universo: come aumenta il tempo, così anche le distanze reciproche tra le galassie aumentano.

Si possono individuare almeno tre frecce del tempo:
1) *la freccia termodinamica*, che riguarda la direzione del tempo in cui aumenta il disordine;
2) *la freccia psicologica*, concernente la direzione in cui "sentiamo" passare il tempo;
3) *la freccia cosmologica*, che è la direzione in cui l'universo si sta espandendo e non contraendo.

La freccia psicologica e quella termodinamica puntano nella stessa direzione, la freccia termodinamica e quella cosmologica non punteranno nella stessa direzione per l'intera storia dell'universo (almeno secondo alcune attuali teorie). Entrerebbero infatti in gioco le condizioni al contorno per l'universo e il principio antropico.

Anche la letteratura e l'arte sono ricche di immagini del tempo: il fiume del tempo, l'incalzare del tempo, il carro del tempo, solo per fare qualche esempio. Secondo alcuni, l'"adesso" avanza in maniera continua attraverso il tempo dal passato al futuro; secondo altri, invece, l'"adesso" appare immobile nel fiume del tempo che scorre incessantemente.

Bibliografia: [B.1] P. Davies: "Spazio e tempo nell'universo moderno", trad. it., Laterza, Bari; [B.2] P. Davies: "Dio e la nuova fisica", Saggi, Arnoldo Mondadori Editore, Milano

AFORISMA: La teoria dei limiti di Cauchy è un formulario magico per esorcizzare il demone **Infinito.**

Il «sesto postulato» di Euclide

Attraverso la definizione di proporzione (definizione 5 del V libro degli Elementi), Euclide postula l'esistenza di una classe di numeri più ampia di quella dei numeri razionali. Egli afferma:" *Si dice che una prima grandezza è con una seconda nello stesso rapporto in cui una terza è con una quarta, quando, se si considerano equimultipli qualsiasi della prima e della terza e gli altri equimultipli qualsiasi della seconda e della quarta, i primi equimultipli sono ambedue maggiori o ambedue uguali o ambedue minori degli altri equimultipli presi nell'ordine corrispondente.*"

La definizione è piuttosto complessa, ma se la si traduce in un linguaggio algebrico moderno, diventa più comprensibile. Consideriamo, infatti quattro segmenti di lunghezza a, b, c, d. Si afferma che a/b = c/d se per ogni coppia di numeri naturali h e k

(1) o $k \cdot a > h \cdot b$ e $k \cdot c > h \cdot d$
(2) o $k \cdot a = h \cdot b$ e $k \cdot c = h \cdot d$
(3) o $k \cdot a < h \cdot b$ e $k \cdot c < h \cdot d$.

La definizione è generale e quindi applicabile anche là dove le grandezze dei segmenti non sono tra di loro commensurabili. Furono Weierstrass e Dedekind a capire e migliorare, traducendo in linguaggio moderno, la definizione di proporzione di Euclide. Dedekind, in particolare, ha introdotto la nozione di «*sezione di Dedekind*» che porta alla nozione di *completezza* dei reali, proprietà che implica l'*archimedeità*, e questa è l'essenza di quanto Euclide ha esposto nella definizione sopra citata. Weierstrass e Dedekind si formarono in matematica studiando gli Elementi di Euclide.

Bibliografia: Lucio Russo, La rivoluzione dimenticata, ed. Feltrinelli, Milano, 2001, pagg. 69-70.