MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 47 – novembre 2001

Problematiche sulla numerosità degli insiemi infiniti

di Ruggero Ferro

Fintantoché gli insiemi che si considerano sono finiti (cioè si può contare quanti sono i loro elementi mettendoli in corrispondenza biiettiva con i numeri che precedono un certo numero naturale) la nozione di insieme può fornire un comodo modo di esprimersi, ma non è indispensabile. Di fatto Cantor per primo elaborò la nozione di insieme per risolvere problemi relativi a quantità di elementi in insiemi infiniti (cioè non finiti).

Si dice che una classe ha tanti elementi quanto un'altra quando c'è una biiettività tra le due classi. In tal caso si dirà anche che le due classi sono equinumerose, o che hanno lo stesso numero di elementi, o che hanno la stessa cardinalità.

Se un insieme A è finito e un altro insieme B è contenuto propriamente (contenuto ma non uguale) in A allora A e B non sono equinumerosi, cioè non c'è alcuna biiettività tra i due. Questo risultato dipende dal fatto che per nessun numero naturale ci può essere una biiettività tra l'insieme dei numeri che lo precedono e l'insieme di quelli che precedono un diverso numero naturale. Però questo risultato non si estende agli insiemi infiniti. Questa affermazione si può giustificare con un contro esempio. I numeri pari sono un sottoinsieme proprio dei numeri naturali, ed entrambi gli insiemi non sono finiti; inoltre la funzione che ad un numero naturale associa il suo doppio è una biiettività dai numeri naturali sui numeri pari. Così si deve dire che i numeri naturali sono tanti quanti i numeri pari pur costituendo questi un sottoinsieme proprio dell'insieme dei naturali.

Per gli insiemi finiti non solo si può dire se hanno lo stesso numero di elementi, ma anche se uno ha più elementi di un altro o meno. Per fare ciò ci si rifà alla relazione d'ordine naturale tra i numeri naturali che contano gli elementi di ciascuno dei due insiemi. Per gli insiemi infiniti non si può utilizzare lo stesso metodo. Come decidere allora quando un insieme ha più o meno elementi di un altro? Anzitutto ci si potrebbe limitare a specifici casi più facili, ad esempio il confronto tra un insieme e un suo sottoinsieme proprio, e, non potendo affermare che il sottoinsieme ha strettamente meno elementi dell'insieme che lo contiene a causa del contro esempio appena visto, si potrebbe decidere di considerare la quantità dei suoi elementi non maggiore di (cioè minore od uguale a) quella degli elementi dell'insieme che lo contiene. Nel caso più generale si potrebbe dire che un insieme ha non più elementi di un altro insieme se ha tanti elementi quanti quelli di un sottoinsieme dell'altro insieme; cioè se c'è una biiettività tra il primo insieme e un sottoinsieme del secondo, ma tale biietttività è una funzione iniettiva totale dal primo insieme nel secondo. Si noti che la caratterizzazione proposta per dire quando un insieme non ha più elementi di un altro è in accordo con la caratterizzazione che va bene per gli insiemi finiti di avere un numero di elementi minore del numero di elementi dell'altro insieme (Esercizio: si provi ciò).

Queste considerazioni motivano la seguente definizione. Si dirà che un insieme <u>ha non più elementi di</u> un secondo insieme, o che il <u>numero dei suoi elementi è minore o uguale al numero di elementi del secondo insieme</u>, o anche che <u>la cardinalità del primo insieme è minore o uguale alla cardinalità del secondo insieme</u>, se c'è una funzione iniettiva totale dal primo al secondo insieme. Ma, a questo punto, sorge prepotente un problema: la relazione introdotta tra insiemi è una relazione d'ordine? Se sì, di che tipo?

Se è un ordine, non è un ordine stretto, per come è stato introdotto, e non è un ordine sugli insiemi. Infatti, se così fosse, dovrebbe valere la proprietà antisimmetrica. cioè se un insieme ha non più elementi di un altro e questo ha non più elementi del primo allora i due sono lo stesso insieme: ma due diversi insiemi equinumerosi hanno una iniettività totale da uno nell'altro in entrambe le direzioni (la biiettività tra uno e l'altro e l'inversa di questa, che è ancora una biiettività, sono anche funzioni iniettive e totali nelle direzioni volute), sicché sono uno minore dell'altro, ma non sono uguali proprio per come sono stati scelti.

Così la relazione introdotta non è una relazione d'ordine tra insiemi. Potrebbe esserlo tra le cardinalità degli insiemi, ma cosa sono le cardinalità degli insiemi? Sono le quantità di elementi, ma in che senso? Precisare cosa debba intendersi per cardinalità anche di insiemi infiniti è un difficile problema che Cantor affrontò con il massimo impegno. Per ora non si definirà il concetto di cardinalità, ma si useranno le espressioni "ugual cardinalità" o "cardinalità minore od uguale" per indicare che tra due insiemi c'è una biiettività o una iniettività totale, rispettivamente, mentre l'espressione "cardinalità di un insieme" indicherà che tra quell'insieme ed un altro ci possono essere relazioni di equinumerosità o minore od uguale numerosità. Sfruttando questi concetti, si cercherà di trovare delle loro proprietà che permettano eventualmente di definire opportunamente la nozione di cardinalità di un insieme come un qualcosa in sé, e non come la considerazione di una relazione di equinumerosità o meno con qualche altro insieme. Per sottolineare la distinzione si potrà riferirsi alla relazione di equinumerosità parlando di numerosità di un insieme, ma si userà anche la dizione cardinalità di un insieme, secondo l'usanza, auspicando che ciò non sia causa di confusione una volta denunciata la possibilità di equivoco.

Il caso e la nascita della vita

Luigi Marigo

In un precedente articolo [B.1], avevo espresso l'opinione che non si possa applicare il calcolo delle probabilità al problema della nascita della vita: essendo noto un solo evento non si può impostare un'analisi frequentista; un approccio assiomatico esige la definizione delle probabilità di determinati eventi, che appare però di tipo tautologico.

Ho letto di recente un libro di Aczel [B.2], esemplare fautore dell'origine casuale della vita: l'autore usa correttamente una formula nota, per calcolare la probabilità che su almeno un pianeta dell'Universo conosciuto esista una vita intelligente simile a quella terrestre: usando altri simboli, indica tale probabilità con

$$P(x, y, z) = 1 - (1 - x \cdot y)^z \qquad (1)$$

ove z è il numero di pianeti dell'Universo conosciuto, y è un coefficiente esprimente la probabilità che un pianeta sia idoneo alla nascita e allo sviluppo della vita, e x è la probabilità che su tale pianeta si formino casualmente molecole di DNA. Riscriviamo la (1) nel seguente modo, per opportunità di calcolo:

$$P(x,y,z) = 1 - exp[z \cdot log(1 - x \cdot y)] \qquad (2)$$

Poiché, in qualsiasi accezione, $x \cdot y$ è piccolo, sviluppando secondo Taylor al I° ordine, si ha

$P(x,y,z) = 1 - exp[-x\cdot y\cdot z)]$ (3)

L' autore pone $z = 3\cdot 10^{22}$, stima compatibile con le conoscenze cosmologiche, $y = 5\cdot 10^{-2}$, $x = 10^{-12}$, e (nei limiti di precisione di una tascabile a 10 cifre) il calcolo fornisce $P \cong 1$. Siamo certi di esistere! Ma … sorvolando sull'arbitrarietà del valore di y, poniamo attenzione al valore di x: Aczel afferma che la probabilità che si formi DNA è piccola e, senza ulteriori motivazioni, traduce tale piccolezza con 10^{-12}, ma il non meno autorevole Fred Hoyle [B.3] stima uguale a $10^{-40.000}$, non dico la probabilità che si formi DNA, ma la probabilità che casualmente si formi un numero minimo di aminoacidi ed enzimi. Senza scomodare Hoyle, basta porre nella (3) $x = 10^{-34}$ per ottenere $P \cong 0$. Poiché fino a $x = 10^{-18}$ P vale 1, se scelgo 10^{-12} la vita è probabilisticamente certa, se scelgo 10^{-34} non dovremmo esistere. Chi ha ragione? Nessuno, perché in ambedue i casi si tratta di valori assegnati al di fuori di qualsiasi criterio scientifico oggettivo, tanto poco si sa dell'origine della vita. Francis Drake [B.2] formulò una equazione per il calcolo del numero di pianeti abitati, e fu indetto un convegno scientifico per l'assegnazione di valori a probabilità del tipo qui trattato, senza che alcuno abbia mai dimostrato che il nascere della vita sia un fenomeno casuale. Il calcolo delle probabilità, nato per dar conto degli esiti dei giochi aleatori, ha visto aumentare enormemente il suo campo di applicazione, ma arrivare ad affermare (o sottintendere) che ogni evento debba o possa realizzarsi per caso, purché si operi su scala adeguata, sembra una extrapolazione di tipo piuttosto metafisico che scientifico, atto di fede religiosa. Scientificamente parlando, non sappiamo se l'origine della vita è dovuta al caso o a un progetto, e forse non abbiamo nemmeno gli strumenti adeguati per una responsabile discussione.

Bibliografia: [B.1] L. Marigo, *Il caso e la vita sulla Terra* – MatematicaMente, n 24, dicembre 1999. [B.2] A. D.Aczel, *Probabilità 1* -Garzanti 1999. [B.3] F.Hoyle, *L' Universo intelligente* - Mondatori 1984

Iperoperazioni in quarta ginnasio

Luigi Cerritelli *

Si espongono alcune nozioni di algebra non standard riguardanti particolari strutture, dette iperstrutture, basate su "operazioni" che hanno per risultato un sottoinsieme proprio. Tali questioni sono state da me introdotte nel programma di quarta ginnasio, in una maniera semplice e operativa, come spunto per una ricerca di "operazioni" che non godano delle proprietà commutativa e associativa. La seguente nota rivolta, a docenti, non contiene sviluppi didattici operativi; ognuno potrà, con pazienza, costruirseli.

Alcuni cenni introduttivi

Sia data in un insieme H una funzione $f(x, y)$ che fa corrispondere ad ogni coppia (x,y) di elementi in H uno ed un sol sottoinsieme non vuoto, quindi un *oggetto* dell'insieme delle parti non vuote $P'(H)$. Se si conviene di adottare una *scrittura iperoperazionale* al posto di *quella funzionale*, si sceglie un simbolo opportuno, ad esempio $<\circ>$, in maniera che $x\circ y$ indichi il sottoinsieme non vuoto di H che corrisponde alla coppia $(x, y) \in H^2$.

DEFINIZIONE. *Si dice iperoperazione sull'insieme H una applicazione di $H\times H$ nell'insieme $P'(H)$ delle parti non vuote di H, $<\circ> : H\times H \to P'(H)$.*

L'insieme H viene, generalmente, chiamato *sostegno* della iperoperazione e la coppia $(H,<\circ>)$ è detta *iperstruttura binaria o ipergruppoide*. Ogni iperoperazione viene poi allargata alle classi dell'insieme sostegno H, nel seguente modo,

$X, Y \subseteq H \to X\circ Y = \cup\, x\circ y$; con $x\in X, y\in Y$.

In base a tale posizione sono giustificate scritture del tipo $X\circ b$, $a\circ X$ dove $a, b \in H$ devono essere pensati entrambi come *singleton (singoletti)*,

$a\circ X = \cup\, a\circ x$; con $x\in X$,

$X\circ b = \cup\, x\circ b$; con $x\in X$.

Assumono ben preciso significato anche scritture in cui vi è *iterazione* della iperoperazione.

I sottoinsiemi, $(x\circ y)\circ z$, $x\circ (y\circ z)$, risultano esprimibili, esplicitamente, con le scritture

$(x\circ y)\circ z = E\circ z$ con $E = x\circ y$

$x\circ (y\circ z) = x\circ F$ con $F = y\circ z$.

Sono scontate le definizioni seguenti,

DEFINIZIONE*. L'iperoperazione $<\circ>$ è commutativa se,*

$\forall\, (x, y) \in H^2 \to x\circ y = y\circ x$.

DEFINIZIONE. *L'iperoperazione $<\circ>$ è associativa se,*

$\forall (x, y, z) \in H^3 \to (x\circ y)\circ z = x\circ (y\circ z)$.

Tre iperoperazioni su n

Si considerino ora le iperoperazioni indotte dalla struttura algebrica $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ sull'insieme $\mathbf{N}$, dei numeri naturali dalle seguenti leggi di ipercomposizione

(1) $\forall\, (a, b)\in \mathbf{N}^2$ $a\perp b = \{a, b, a+b\}$

(2) $\forall\, (a, b)\in \mathbf{N}^2$ $a\square b = \{a, b, 2a\}$

(3) $\forall\, (a, b)\in \mathbf{N}^2$ $a\circ b = \{a, b, a^b\}$

Si pongono alla classe i quesiti seguenti:

A) Quali tra le predette iperoperazioni sono commutative? E quali risultano associative?

B) Quali sono, per ognuna di esse, le condizioni che rendano i sottoinsiemi $a\perp b$, $a\square b$, $a\circ b$ unitari?

Tre iperoperazioni geometriche

Si considerino le iperoperazioni indotte su un piano geometrico ordinario π dalle seguenti leggi,

(4) $\forall\, (P,Q)\in\pi$, $P\perp Q = [PQ]$

(5) $\forall\, (P,Q)\in\pi$, $P\square Q = (PQ]$

(6) $\forall\, (P,Q)\in\pi$, $P\circ Q = [PQ)$.

Le scritture $[PQ]$, $(PQ]$, $[PQ)$ indicano rispettivamente il segmento PQ chiuso agli estremi, aperto a sinistra e chiuso a destra, chiuso a sinistra ed aperto a destra. In questo caso si ripropongono le domande A, B del paragrafo precedente e si propone, fissato un terzo punto T, di indagare la natura delle figure geometriche $(P\perp Q)\perp T$, $P\perp(Q\perp T)$, $(P\square Q)\square T$, $P\square(Q\square T)$, $(P\circ Q)\circ T$, $P\circ(Q\circ T)$.

Tali insiemi corrispondono al triangolo PQT chiuso su tutti i suoi lati o aperto in vari modi su qualche lato, nel caso di punti non allineati. Altra interessante situazione si ha nel caso che i tre punti P,Q,T siano allineati.

Conclusioni

È stato interessante osservare le reazioni degli studenti quattordicenni, appena licenziati dalla scuola media, innanzitutto sul fatto che il risultato di una operazione fosse un insieme. Li ha rincuorati scoprire la commutatività e l'associatività della iperoperazione (1) e sono rimasti quasi diffidenti nello scoprire la non commutatività e la non associatività delle iperoperazioni (2) e (3). Le iperoperazioni geometriche del cosiddetto "passaggio al segmento", illustrate opportunamente alla lavagna, hanno mostrato l'aspetto non standard di questo tipo di algebra che descrive anche la costruzione delle figure geometriche ordinarie. È quanto il docente voleva che loro cogliessero. Su un insieme si opera con leggi che provengono unicamente dalla fantasia creatrice di un costruttore di idee atte a rappresentare nuovi aspetti della fenomenologia algebrico-geometrica.

Bibliografia: [B1] L. Cerritelli, Conversazioni all'Ateneo, L'endecasillabo matematico, Mathesis, Edizione speciale del Consiglio Nazionale. Roma, (1999), 47-60; [B2] P. Corsini, Prolegomena of hypergroup theory, 2nd ed. Aviani Editore Udine, 1992

**Liceo-Ginnasio Arnaldo, Brescia – Consigliere nazionale della Mathesis*