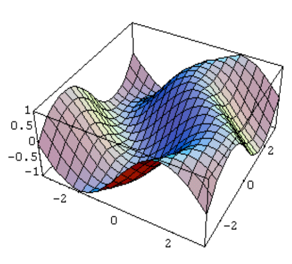
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 48 – dicembre 2001



Proprietà della numerosità di insiemi infiniti

di Ruggero Ferro [1]

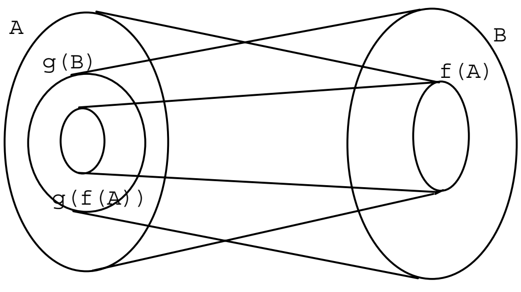
Anzitutto si ricordi quanto già definito [MatematicaMente n. 47]:
a) un insieme A ha uguale cardinalità di un insieme B se esiste una biiettività da A su B,
b) un insieme A ha cardinalità minore od uguale alla cardinalità di un insieme B se esiste una funzione totale iniettiva da A in B (una funzione da un primo insieme in un altro è detta totale se il suo dominio coincide con il primo insieme).

Si vuole mostrare che la relazione appena richiamata, tra cardinalità (di essere minore od uguale), è una relazione d'ordine, mostrando che è riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

La proprietà riflessiva in questo caso si formula così: ogni cardinalità è minore o uguale a sé stessa. Detta così sembrerebbe una affermazione ovvia, ma non lo è altrettanto se si ricorda qual è il significato dato alle espressioni usate. In effetti, poiché potrebbero esserci più insiemi della stessa cardinalità, diciamo A e B, si richiede di dimostrare che c'è anche una funzione totale iniettiva da A in B. Di fatto è proprio così perché la funzione biiettività da A su B, che c'è perché A e B hanno la stessa cardinalità, è, tra l'altro, una iniettività totale da A in B.

Per mostrare la proprietà transitiva si osservi che, date le due funzioni totali f_1 e f_2 rispettivamente da un insieme A in un insieme B e da B in un insieme C, la funzione composta $f_2(f_1)$ è una funzione totale iniettiva da A in C, che è quello che si voleva far vedere che c'è. Si noti che la totalità della funzione composta non deriva dal fatto che la composizione di funzioni totali è una funzione totale (affermazione falsa nella sua generalità), quanto piuttosto dal fatto che il dominio della seconda funzione contiene il codominio della prima e che questa è totale.

Rimane da mostrare la proprietà antisimmetrica, cioè che se la cardinalità di un insieme A è minore od uguale a quella di un secondo insieme B e questa è minore od uguale a quella di A allora i due insiemi hanno la stessa cardinalità.



In base alle definizioni delle nozioni che si stanno considerando, si deve mostrare che se c'è una funzione totale iniettiva f da A in B e una funzione totale iniettiva g da B in A allora c'è una biiettività tra A e B. La situazione in ipotesi può essere rappresentata dalla precedente figura.
Se si potesse costruire una biiettività h tra A e $g(B)$, otterremo anche la biiettività voluta componendo le funzioni h e g^{-1} essendo g^{-1} una biiettività dal codominio di h, che è $g(B)$, su B (si ricordi che g è iniettiva sicché la sua inversa è una funzione iniettiva dal codominio di g, che è $g(B)$, sul dominio di g, che è B). Si osservi anche che nella situazione che si sta considerando c'è anche una biiettività tra A e il suo sottinsieme $g(f(A))$ dal momento che la funzione composta $g(f)$ è iniettiva (in quanto composizione di funzioni iniettive) totale (in quanto composizione di funzioni la prima totale e con il dominio della seconda includente il codominio della prima) e suriettiva su $g(f(A))$ (essendo questo il suo codominio).

Così si dimostrerebbe l'antisimmetria della relazione di minore od uguale numerosità se si riuscisse a trovare una biiettività da un insieme ad un suo sottoinsieme che contenga un ulteriore sottoinsieme biiettivo al primo insieme.
Si può riformulare così il nuovo problema.
Problema. Dati un insieme X_0, una biiettività f da X_0 in un suo sottoinsieme X_1 e un insieme Z_0 contenuto in X_0 e contenente X_1, trovare una biiettività da X_0 su Z_0.

[1] *Docente di Logica Matematica presso la Facoltà di Scienze MM. FF. NN. Corso di Informatica dell'Università degli Studi di Verona*

Pensieri sul continuo

di Ivano Arcangeloni

Premessa

Vorrei tornare su quanto scritto nel numero 37 (gennaio 2001) di *Matematicamente*, a proposito della crisi di quello che definii "il concetto epistemologico di rapporto", sfidando con questo anche quanto Luciano Corso ebbe a scrivere nella nota posta in calce al suo articolo sulla matematica pitagorica, l'essere cioè lo scrivere di storia della matematica assai pericoloso, poiché si rischia o di dire grandi ovvietà, o di commettere errori micidiali. Forte dell'incoscienza di chi non ha nulla da perdere vorrei allora tornare su quel tema: quello del passaggio dal discreto al "continuo", delle resistenze che si ebbero nell'accettazione del continuo, soprattutto da parte di Kronecker, questo intuizionista ante-litteram, secondo la definizione di John D. Barrow, che a lungo osteggiò l'ingresso di "irrazionali" e di "trascendenti" in matematica. Il rapporto fra Kronecker e Cantor, non fu certo facile, ma nemmeno così tempestoso come l'opera del Bell ha voluto far credere ([B2] pp. 560-584), tanto da spingersi a giustificare l'odio che Kronecker provava per Cantor con l'antisemitismo del primo, quando Cantor per altro non era nemmeno ebreo… Al di là dell'aspetto umano della vicenda quello che ci interessa è il lato "matematico", ed è certo che, proprio dal punto di vista matematico è difficile pensare a due posizioni più lontane: quello che Barrow definisce il manifesto "pre-intuizionista" di Kronecker contempla in sintesi quattro punti, "1) i numeri naturali e la loro addizione sono una base sicura della matematica perché ancorati alla nostra intuizione, 2) qualunque definizione o dimostrazione dovrebbe essere costruttiva, 3) la logica è distinta dalla matematica, 4) non si possono prendere in considerazione infiniti attuali" ([B1] p.338 e segg.), Cantor invece, come torneremo a vedere, utilizzò in modo sistematico definizioni non costruttive, e fece ampio uso, com'è noto, di infiniti attuali.

Il numero *iota*

Per meglio comprendere la portata della questione, quella della "comprensione" del continuo, per comprendere la rottura che l'idea del continuo segna rispetto alla matematica precedente, definisco qui un particolare numero trascendente che chiamerò *iota*: il numero *iota* ha come parte intera il numero 11, mentre per n naturale la sua cifra decimale di posizione $2n$-1 è quella cifra che nello sviluppo di e occupa la posizione $(2n\text{-}1)^3$ e la sua cifra decimale di posizione $2n$ è la stessa cifra che nello sviluppo di π occupa la posizione $(2n)^2$. Credo che ognuno di noi convenga nel ritenere *iota* un trascendente, chi ne dubitasse non ha che da esibire una equazione di grado n a un'incognita e a coefficienti razionali che abbia *iota* tra le sue soluzioni… Per curiosità noteremo che in prima approssimazione *iota* è dato da: ι =11,75… essendo 7 la cifra di posizione 1^3 nello sviluppo decimale di e, e 5 la cifra di posizione 2^2 nello sviluppo decimale di π, ma qui devo già fermarmi, poiché la terza cifra decimale di *iota* è uguale alla ventisettesima di e, che non conosco. Qualche lettore potrà, se vorrà, contribuire ad affinare la conoscenza di questo "nuovo" (ma è davvero nuovo?) numero trascendente.

La crisi del "rapporto" (o meglio della "coppia ordinata")

Conosciamo bene il modo col quale siamo soliti passare dall'insieme dei naturali a quello dei reali: dalla necessità di risolvere alcuni problemi siamo spinti ad "ampliare" l'insieme degli oggetti numerici che manipoliamo, così per esempio se invece che contare gli oggetti appoggiati su una scrivania, dobbiamo stendere il bilancio di un'azienda, siamo naturalmente portati a passare dai naturali agli interi. Tuttavia questo approccio, se dal punto di vista intuitivo è efficace, potrebbe essere rischioso dal punto di vista didattico: si chiede ad esempio il Waismann, "ma allora perché non ampliamo i nostri insiemi numerici fino ad includere quei numeri che siano la soluzione di equazioni del tipo $1^x=2$?" ([B4] p.27), oppure quei numeri che siano soluzioni di sistemi lineari "impossibili", e così via… Non è semplice far capire perché alcuni problemi sono "davvero impossibili", e altri sono invece "non risolvibili nell'insieme numerico nel quale stiamo operando in questo momento". Si potrebbe ingenerare il sospetto che allora nulla è impossibile in matematica, che basta inventarsi un nuovo "contenitore" di numeri, più ampio del precedente, ed ecco che le soluzioni si trovano. Certo il modo "rigoroso" di ampliare insiemi numerici richiede per lo meno una buona famigliarità coi concetti di "classe di equivalenza" e di "insieme quoziente", che anche se si insegnano fin dal primo anno della scuola secondaria, sono spesso indigesti agli allievi.

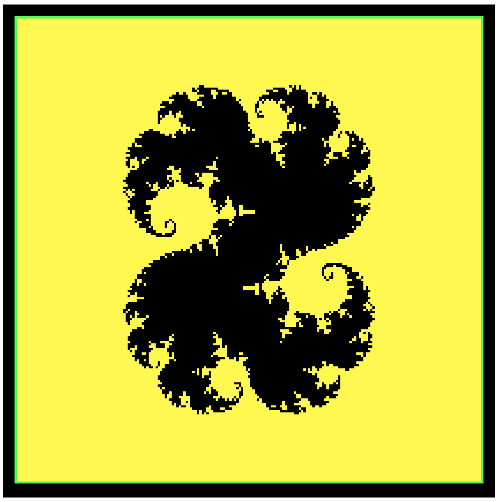
Veniamo comunque alla sostanza: il metodo di "ampliare" insiemi numerici tramite introduzione di coppie ordinate e opportune relazioni di equivalenza, funziona bene finché si deve passare dai naturali agli interi e poi dagli interi ai razionali. Funziona bene, poiché come argomenta diffusamente Waismann, nel definire nuovi oggetti numerici, che altro non sono che coppie ordinate di oggetti del "livello più basso", noi trasferiamo, grazie ad un'opportuna definizione di "equivalenza", o di "uguaglianza", tutta una gamma di proprietà che il livello precedente aveva. Così per esempio possiamo estendere alle coppie di naturali l'ordinamento, ed anche le proprietà associativa, commutativa, di esistenza di un elemento neutro e di esistenza di un elemento "opposto" valide per la somma tra naturali alla somma tra coppie di naturali. E questo principio di "conservazione" delle proprietà aritmetiche è guida valida che ci consente di accettare il nuovo sistema che si è appena creato. Anche se a questo proposito occorre tenere conto di un'obiezione antica, da far risalire almeno a John Wallis (1616 -1703); visto che per ogni naturale si ha $1/m < 1/(m\text{-}1)$ allora $1/0 < 1/(\text{-}1)$, quindi, essendo 1/0 infinito, "*i numeri negativi sono più che infiniti*", idea questa non peregrina se si ragiona sull'ordine ciclico, invece che su quello lineare. Ma che ci mostra che il principio di "permanenza", di "conservazione" delle regole del livello inferiore, deve fare i conti col fatto che qualche principio va perduto passando al livello superiore; così il volere estendere allo zero le relazioni a) $m > m\text{-}1$ oppure b) $1/m < 1/(m\text{-}1)$ fa sì che una delle due relazioni si perda, e quindi semplicemente dovemmo dire che si aprono *due vie a due possibili sistemi numerici affatto differenti* ma entrambi legittimi, noi abbiamo preferito tenerci la a), ed estendere quella al caso m=1, ma avremmo potuto tenerci anche la b) e rinunciare alla a), avremmo avuto un'aritmetica dei razionali ciclica invece che lineare ([B4] pp.59-63). [*Segue al numero 49*].

La redazione di MatematicaMente augura a tutti i soci un felice anno 2002

Attrattori strani

ovvero come certi sistemi dinamici caotici possono selezionare insiemi di punti affascinanti

di Luciano Corso



Bella questa figura, vero (figura in nero, fondo giallo, bordo nero) ? Un classico esempio di insieme di punti generato da un sistema dinamico caotico deterministico. La figura è nota come insieme di Julia (uno dei tanti) e nasce da una particolare interpretazione di come vanno selezionati i punti di un dominio di una mappa del tipo $Z_{n+1}=Z_n^2+c$, variante topologica della famosa equazione differenziale di Verhulst (si veda MatematicaMente n. 7). Z_n e c sono definite in campo complesso. Qui il piano complesso è in Z. La sua parte reale è in ascissa e la sua parte immaginaria è in ordinata.

Il programma da me preparato è in QBASIC e viene presentato qui di seguito:

```
10 CLS
20 DIM rex(301), imx(301)
30 SCREEN 12
40 VIEW (200, 100)-(400, 300), 14, 10
50 WINDOW (0, 0)-(200, 200)
60 REM ----------------------------------INIZIO------------------------------------
70 LET rec = .27334: imc = .00742
80 FOR rex = -1.5 TO 1.5 STEP .015
90 FOR imx = -1.5 TO 1.5 STEP .015
100 LET rex(0) = rex: imx(0) = imx
110 FOR n = 0 TO 100
120 rex(n + 1) = rex(n) ^ 2 - imx(n) ^ 2 + rec
170 imx(n + 1) = 2 * rex(n) * imx(n) + imc
180 IF rex(n + 1) ^ 2 + imx(n + 1) ^ 2 <= 4 THEN 260 ELSE 190
190 LET n = 100: GOTO 300
260 NEXT n
270 convrex = 100 + (200 / 3) * rex
275 convimx = 100 + (200 / 3) * imx
280 COLOR 0
285 PSET (convrex, convimx)
300 NEXT imx
310 NEXT rex
340 END
```

Bibliografia: H.-O. Peitgen P.H. Richter, La bellezza dei frattali, pagg. 14 e 187, ed. Bollati Boringhieri, 1987