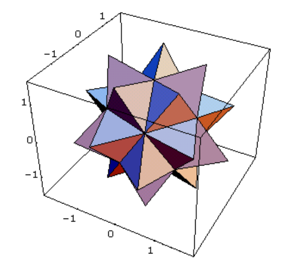
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 49 – gennaio 2002



Temperatura termodinamica assoluta

di Nazario Magnarelli [1]

Alcuni testi di Fisica Generale dedicano solo qualche pagina al tema della "Temperatura termodinamica assoluta", ingenerando pertanto nel lettore qualche incertezza di interpretazione. Per ovviare a ciò, vogliamo dare una esauriente esposizione dell'argomento riportando, con ampia sintesi, quanto si legge in proposito sui testi di Enrico Fermi e Gilberto Bernardini.

Nel descrivere i metodi di misura della temperatura abbiamo sottolineato il fatto che le scale termometriche ottenute mediante sostanze diverse non danno esattamente gli stessi valori per le varie temperature; infatti le varie sostanze non si dilatano tutte uniformemente in qualsiasi intervallo di temperatura. Questa incongruenza crea alcuni problemi nella defizione delle misure. Per ovviare all'inconveniente bisognerebbe quindi disporre di un termometro la cui scala di valori sia indipendente dalla natura della sostanza termometrica impiegata. Il teorema fondamentale di Carnot ci permette di definire questa scala mediante considerazioni generali di termodinamica e la stessa macchina reversibile di Carnot può fungere da termometro particolare. Vediamo in quale modo.

Come sappiamo il teorema fondamentale di Carnot mostra che il rapporto Q_1/Q_2 fra la quantità di calore assorbito da una macchina termica reversibile e la quantità di calore da essa ceduto in un ciclo ha lo stesso valore per tutte le macchine reversibili funzionanti fra le stesse temperature t_1, t_2 (con $t_1 > t_2$), lette su una qualsiasi scala empirica, qualunque sia la natura della sostanza che esegue il ciclo termodinamico. Possiamo quindi scrivere:

$$Q_2 / Q_1 = f(t_1, t_2). \qquad (1)$$

La funzione $f(t_1,t_2)$ si dice "universale" per indicare la sua indipendenza dalla particolare macchina reversibile che si considera.

Dimostriamo ora che la funzione $f(t_1,t_2)$ ha la seguente proprietà

$$f(t_1, t_2) = f(t_2, t_0) / f(t_1, t_0)\ , \qquad (2)$$

ove t_0, t_1, t_2 sono tre temperature arbitrarie e $t_0 < t_2 < t_1$. Infatti sia *A* una macchina reversibile funzionante fra le temperature t_0 e t_1 e *B* un'altra macchina reversibile funzionante fra le temperature t_0 e t_2. Durante un ciclo, la macchina A assorbe dal termostato caldo una certa quantità di calore Q_1 alla temperatura t_1 e cede al termostato freddo la quantità di calore Q_0 alla temperatura t_0. Per la (1) si ha:

$$Q_0 / Q_1 = f(t_1, t_0). \qquad (3)$$

Per la macchina B si ha una relazione analoga; se facciamo l'ipotesi che il calore ceduto al termostato t_0 sia ancora Q_0, come per la prima macchina, possiamo scrivere

$$Q_0 / Q_2 = f(t_2, t_0). \qquad (4)$$

Dividendo membro a membro si ha

$$Q_2 / Q_1 = f(t_2, t_0) / f(t_1, t_0). \qquad (5)$$

Consideriamo ora una macchina complessa costituita da A e dalla macchina B che lavori a rovescio. Questa macchina esegue un ciclo reversibile, essendo questo costituito da due cicli reversibili. Durante il ciclo complesso il termostato t_0 non influenza il risultato finale perché assorbe dalla macchina A la quantità di calore Q_0 che poi esso restituisce alla macchina B, che lavora a rovescio. Praticamente la macchina complessa assorbe dal termostato caldo la quantità di calore Q_1 alla temperatura t_1 e cede al termostato freddo la quantità di calore Q_2 alla temperatura t_2. Per la definizione (1) applicata alla macchina complessa, possiamo scrivere

$$Q_2 / Q_1 = f(t_1, t_2). \qquad (6)$$

Confrontando le (5), (6) si ricava la formula

$$f(t_1, t_2) = f(t_2, t_0) / f(t_1, t_0). \qquad (7)$$

Si ottiene così la proprietà che volevamo dimostrare.

Poiché nella discussione svolta la temperatura t_0 è arbitraria, possiamo mantenerla costante per ogni macchina reversibile funzionante fra due temperature qualsiasi. Ne segue che possiamo considerare $f(t, t_0)$ come funzione univoca e crescente della sola t e possiamo perciò porre

$$C\,f(t, t_0)=\vartheta(t) \qquad (8)$$

dove C è una costante arbitraria.

Sostituendo la (8) nella (5) e ricordando la (1) si ha

$$Q_2 / Q_1 = f(t_1, t_2) = \vartheta(t_2) / \vartheta(t_1). \qquad (9)$$

Questa equazione ci dice che $f(t_1, t_2)$ è uguale al rapporto tra una funzione del solo argomento t_2 e la stessa funzione dell'argomento t_1.

L'equazione (9) è molto importante perché essa è il punto di partenza che ci consente di definire una nuova temperatura, che sarà detta giustamente *"temperatura termodinamica assoluta"*. Dalla (9) si ha $\vartheta(t_1) / Q_1 = \vartheta(t_2) / Q_2 = cost$ e quindi

$$\vartheta(t) = KQ \qquad (10)$$

dove K è una costante arbitraria e la quantità di calore Q, definita a meno della costante moltiplicativa K, è quella che una sorgente a temperatura t dovrebbe cedere ad una macchina reversibile che abbia l'altra sorgente alla temperatura di riferimento t_0.

Dobbiamo osservare che la forma della funzione $\vartheta(t)$ non può essere determinata in modo esplicito, poiché essa dipende dalla scala empirica delle temperature adottate. Poiché questa scala è completamente arbitraria, possiamo introdurre una nuova scala delle temperature usando convenientemente come temperatura la funzione $\vartheta(t)$ invece di t; per non creare equivoci indicheremo queste temperature con lo stesso simbolo ϑ.

In tal modo la (10) diventa

$$\vartheta = KQ \qquad (11)$$

Poiché le quantità di calore si misurano in unità meccaniche e sono indipendenti dalla natura del fluido impiegato nella macchina reversibile di Carnot, usata per stabilire la formula (11), concludiamo che la scala di temperature così realizzata è una scala assoluta, cioè indipendente dalle particolari proprietà della sostanza termodinamica usata; per tale motivo ϑ si dice temperatura termodinamica assoluta. *[Segue al n. 50]*

[1] *Fisico, Mathesis di Latina, e-mail: mag.lor@free.panservice.it*

Pensieri sul continuo

di Ivano Arcangeloni [2]

[*Segue dal n. 48*]

Nel passaggio dai razionali ai reali accade qualcosa di completamente differente: i nuovi oggetti numerici, numeri irrazionali e numeri trascendenti, sono definiti, alla maniera di Dedekind, come "sezioni" di insiemi di razionali. Potremmo anche assimilare la sezione ad una "coppia ordinata", ma si tratterebbe di una coppia insolita, non più una coppia del tipo

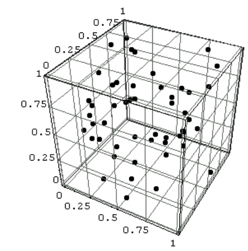
(a, b), con a e b *numeri* razionali, ma una coppia del tipo (A,B), con A e B *insiemi* di razionali, anzi, molto di più, con A e B partizione dell'insieme dei numeri razionali. Il salto logico, come si vede, è notevole, e non dovrebbe dunque stupire che abbia suscitato tante perplessità, né dovrebbe stupire che studenti del secondo anno della scuola media superiore, stentino a comprenderne la portata. Ma diamo uno sguardo alla definizione di Cantor: i numeri reali sarebbero l'insieme di tutte le successioni convergenti di razionali. Anche qui "il salto logico" appare in tutta la sua complessità: i "nuovi numeri" non vengono più definiti da due soli "vecchi numeri", ma da una loro infinità, poiché infiniti sono i numeri contenuti in ciascuna delle "classi" di Dedekind, infiniti sono ovviamente i termini delle successioni convergenti che Cantor *definisce* come numero reale: si faccia attenzione, il numero reale *non* è il limite di tali successioni, altrimenti ci troveremmo di fronte ad una definizione circolare, ma il numero reale è *l'intera successione, con tutti gli infiniti razionali che la compongono*. Qui sta il nocciolo della questione, il problema vero, il perché delle resistenze: i nuovi numeri non sono "rapporti" tra due numeri, o che è lo stesso, "coppie ordinate" di due numeri razionali, ma sono, se si vuole, "rapporti" tra infiniti razionali, considerati tutti simultaneamente. E ancora, queste definizioni non sono "costruttive", anche se ne hanno la parvenza. Ma sia Dedekind che Cantor dopo aver definito i numeri reali nei due modi equivalenti che conosciamo, aggiungono, *devono* farlo, un assioma di continuità. Vale a dire, un assioma che dica qualcosa di simile a: "in questo modo noi individuiamo *tutti* i punti della retta geometrica, non esistono altri numeri reali al di fuori di questi". Il parallelismo tra retta della geometria sintetica e numeri reali è più che calzante, poiché è lo stesso Dedekind a riconoscere che il suo assioma di continuità si ispira all'assioma di "partizione del piano". Torniamo allora al numero ι, l'assioma di continuità, in tutte le sue formulazioni, ci assicura che ι è reale, e di questo dovremmo fidarci, è un assioma… Ma possiamo determinare due classi contigue di numeri razionali che ammettano come *unico* elemento separatore ι? O, ragionando come Cantor, siamo in grado di esibire una successione di razionali convergente a ι? Ma se così non è, e ammettendo di non mettere in discussione l'assioma di continuità, possibile che queste caratterizzazioni di numero reale ci sembrino soddisfacenti? Deve essere solo perché è comodo crederlo.

Ma la continuità ci serve?

Sappiamo che al di fuori della matematica la continuità non esiste, oramai prende sempre più piede la convinzione che perfino il tempo, e di cos'altro potremmo dire che sia continuo, sia discreto: si suppone che in realtà ci sia un tempo "atomico", della durata microscopica di 10^{-43} secondi (il cosiddetto "tempo di Planck"), che non possa essere ulteriormente suddiviso in unità più piccole ([B3] pp.143 e segg.). Ma il problema è: *in matematica* la continuità ci serve? E la risposta è semplicemente *NO*. Ad esempio la teoria dell'integrale di Riemann ci consente di integrare funzioni che siano continue ovunque tranne al più che in un infinità numerabile di punti. Quindi, tanto per cominciare, del numero iota potremmo tranquillamente fare a meno: supponiamo che nessuna delle funzioni note sia definita su iota, basterà prolungare con continuità la funzione *f* in esame ad una funzione *F* con la proprietà che *F(x)=f(x)* per tutti gli *x* del dominio di *f*, tranne che per iota, e porre poi *F(ι)*=11, avremo una funzione *F* che è sicuramente integrabile secondo Riemann sul dominio di definizione della *f*, purché lo sia ovviamente quest'ultima. Per non parlare della teoria della misura di Lebesgue, che ci permette di "integrare" anche quelle funzioni che non siano definite in una infinità non numerabile di punti. Probabilmente *F* non risulterà derivabile in ι, ma questo è di una qualche importanza? Ci troveremo mai di fronte ad un problema che ci richieda di trovare l'equazione della tangente alla *F* nel punto ι ? Io credo di no. E comunque l'analisi numerica che opera nel discreto, che ignora il numero iota, non ci permette forse di determinare soluzioni di equazioni differenziali complesse, di fronte alle quali il nostro apparato di conoscenze teoriche non può che dimostrarci che "tali soluzioni esistono" e punto, senza aiutarci nell'impresa del cercarle nell'infinita e non interrotta retta dei numeri reali? E allora qui non resta che invocare un amore di armonia, che ci spinge a volere a tutti i costi il continuo, e a volere nel continuo anche quel numero ι di cui non ci faremo mai nulla nelle applicazioni, non solo e non tanto pratiche, ma nemmeno in quelle teoriche della matematica. C'è insomma una motivazione psicologica, nulla più, nel nostro volere la continuità dei numeri reali, nel nostro volere funzioni definite sull'infinità attuale di tutti i numeri trascendenti compresi quelli costruibili ad hoc, per puro divertimento: è una "natura" di numero reale che invochiamo, e che ricorda la natura di "linea retta", che il Sacchéri utilizzava per dimostrare l'impossibilità di una geometria iperbolica. Scrive Hao Wang che "nessun sistema particolare coglie la nostra intuizione dei numeri reali" ([B5] p.86), tutto qui, noi di quella intuizione, di quella idea platonica vogliamo fare sistema teorico e formale, ma a quale prezzo? E i nostri studenti? Siamo convinti che sia lecito pretendere che ci seguano in questo nostro ostinarci nel "Bello Estremo" del continuo? Si potrà obiettare che fuori del continuo la nostra analisi sarebbe molto più difficile, ma non dico che si debba insegnare la matematica discreta al posto di quella continua. Teniamoci stretta l'analisi di Weierstrass, assolutamente, ciò che forse non è fondamentale è che di "funzione continua" si pensi qualcosa di diverso da "funzione senza buchi".

Bibliografia: [B1] Barrow, John D., *La luna nel pozzo cosmico*, tr. it. Adelphi, Milano 1994; [B2] Bell, Eric Temple, *I grandi matematici*, tr. it. di Dina Aduni, Sansoni, Firenze 1966; [B3] Smoot, George, *Nelle pieghe del tempo, la scoperta dell'universo neonato*, tr. it. di Patrizia Piazzi e Nazzareno Mandolesi, Arnoldo Mondatori, Milano 1994; [B4] Waismann, Friedrich, *Introduzione al pensiero matematico*, tr. it. di Ludovico Geymonat, Bollati Boringhieri, Torino 1971; [B5] Wang, Hao, *Dalla matematica alla filosofia*, tr. it. di Alberto Giacomelli, Bollati Boringhieri, Torino 1984.

[2] Docente di Matematica - socio Mathesis - di Forlì



Una combinazione infinita

di Luciano Corso

Punti vagano a caso,
da luoghi in luoghi,
condotti da giochi perversi,
inclini a ricominciare
sempre da capo,
senza possibile fine.
Ogni volta il nuovo è diverso,
in questo mondo
mai nulla si ripete.
L'ordine muta e pure il pensiero.
Particelle occupano
distinti spazi invisibili,
o simboli vanno in celle ordinate
a formare parole
che vogliono dire qualcosa
a chi sa capire poco o nulla.
Sono combinazioni infinite di cose
dominate dal vuoto.
E il moto continua.

Forse la vita (tutto ciò che sperimentiamo, conosciamo, pensiamo, gli affetti, le speranze, le ipotesi) è frutto di puri processi combinatorî di parti elementari di materia ed energia, in divenire continuo.