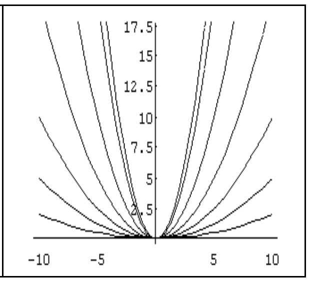
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 50 – febbraio 2002



Temperatura termodinamica assoluta

di Nazario Magnarelli [1]

[*Segue dal numero 49*] Rimane da determinare la costante moltiplicativa K e da costruire la scala delle temperature, e ciò si può fare facilmente come segue:
a) si fissano sul termometro due punti fissi della scala, per esempio quello del ghiaccio fondente alla pressione di 1 Atm e quello dei vapori di acqua bollente alla stessa pressione;
b) si prende come unità di misura delle temperature la centesima parte dell'intervallo che ha per estremi questi due punti.
Sia dunque ϑ_0 la temperatura del ghiaccio fondente e ϑ_{100} la temperatura di ebollizione dell'acqua alla pressione di 1 Atm.
Per la (11) si ha

$$\vartheta_{100}=KQ_{100} \qquad (12)$$

ove Q_{100} e Q_0 sono rispettivamente le quantità di calore assorbite e cedute da una macchina reversibile avente la caldaia alla temperatura dell'acqua bollente e il refrigerante alla temperatura di fusione del ghiaccio.
Sottraendo membro a membro si ha

$$\vartheta_{100} - \vartheta_0 = K(Q_{100} - Q_0). \qquad (13)$$

Poiché abbiamo preso l'unità di misura delle temperature in modo che sia $\vartheta_{100} - \vartheta_0 = 100$, dalla (13) si ricava

$$K = 100 / (Q_{100} - Q_0). \qquad (14)$$

Il valore di K risulta in tal modo numericamente determinato. Esso ci permette di ricavare un'espressione di ϑ_0 che ci sarà utile in seguito. Infatti, sostituiamo il valore di K nella formula $\vartheta_0 = KQ_0$, che ci dà la temperatura di fusione del ghiaccio; si ottiene

$$\vartheta_0 = 100 / (Q_{100} - Q_0)$$

da cui

$$\vartheta_0 = 100 / ((Q_{100} / Q_0) - 1). \qquad (15)$$

Possiamo ora dimostrare che la temperatura termodinamica assoluta ϑ coincide con la temperatura assoluta T, definita per mezzo della scala empirica di un termometro a gas perfetto.
Infatti consideriamo il ciclo reversibile dato da una macchina di Carnot che lavori con un gas perfetto fra due termostati a temperature T_1 e T_2 (con $T_1 > T_2$), ove T_1 e T_2 sono temperature assolute misurate con un termometro a gas perfetto. Sappiamo che il rendimento del ciclo è

$$\rho = (Q_1 - Q_2) / Q_1 = (T_1 - T_2) / T_1,$$

ove Q_1 è il calore assorbito dal gas dal termostato caldo e $-Q_2$ il calore ceduto al termostato freddo. Da questa formula subito si ricava

$$Q_2 / Q_1 = T_2 / T_1 \,; \qquad (17)$$

ma per definizione di temperatura termodinamica assoluta si ha: $Q_2 / Q_1 = \vartheta_2 / \vartheta_1$.
Ne segue, confrontando, che le due scale ϑ e T sono proporzionali; ma poiché per le due scale abbiamo scelto la stessa unità di misura per le temperature (cioè la centesima parte dell'intervallo fra il punto di fusione del ghiaccio e il punto di ebollizione dell'acqua), ne segue che le due scale coincidono anche numericamente.
A riprova di ciò, ricordiamo che sulla scala T le temperature di fusione e di ebollizione di cui sopra sono rispettivamente T_0 = 273,15 °K e T_{100} = 373,15 °K.
Sostituendo nella (17) si ricava: Q_0 / Q_{100} = 273,15 / 373,15 e quindi Q_{100} / Q_0 = 373,15 / 273,15. Sostituendo questo rapporto nella formula (15), che ci dà la temperatura termodinamica assoluta del ghiaccio fondente, si ottiene
ϑ_0 = 100 / ((373,15 / 273,15) –1)=273,15;
ossia, anche numericamente, $\vartheta_0 = T_0$ = 273,15.

La temperatura termodinamica assoluta è detta anche temperatura Kelvin. La scala di questa temperatura non è una scala convenzionale, come quelle che conosciamo. Infatti il rapporto fra due valori della temperatura in detta scala rappresenta anche il rapporto fra le quantità di calore scambiate fra i termostati in un ciclo di Carnot che opera fra le stesse temperature. Ricordiamo, in proposito, che si ha $\vartheta_2 / \vartheta_1 = Q_2 / Q_1$.

Recenti convenzioni internazionali stabiliscono che l'unità di misura sulla scala termodinamica assoluta va indicata con la dizione Kelvin, che essa va rappresentata con la scritta K e non °K. Ad esempio, 300 K va letto trecento Kelvin e non trecento gradi Kelvin; non mancano però resistenze a questa innovazione. Con ciò, il discorso sulla temperatura termodinamica assoluta può considerarsi concluso.

Bibliografia: [1] E. Fermi, *Termodinamica*, Cap. 3° pagg. 47-51, Boringhieri, 1972 2ª edizione,1982 5ª edizione, Torino; [2] Gilberto Bernardini, *Fisica Sperimentale* vol. I ;11a edizione 1956 cap. V paragrafo 4 pagg. 627-632, Libreria eredi V. Veschi, Roma

[1] *Fisico, Mathesis di Latina, P.le G. Carturan 12 Sc. A /7 - 04100 Latina, e- mail mag.lor@free.panservice.it*

Un metodo di calcolo del *Polinomio Caratteristico* d'una matrice quadrata

di Arnaldo Vicentini

Data la matrice quadrata A di formato $n \times n$ e la variabile indeterminata x, il polinomio caratteristico di A è il polinomio (monico di grado n) $P(x)=\det(xI - A)$, dove I è la matrice identità .Sia $\boldsymbol{a}$ un vettore non nullo di dimensione n tale che il suo trasformato da A, cioè $A\boldsymbol{a}$, sia parallelo ad $\boldsymbol{a}$: allora $\boldsymbol{a}$ è un autovettore di A e il rapporto scalare λ tra il trasformato di $\boldsymbol{a}$ ed $\boldsymbol{a}$ stesso è il suo autovalore. È noto che gli zeri di $P(x)$ sono tutti e soli gli autovalori di A. Il calcolo di $P(x)$ tramite la sua definizione, ossia quale determinante di una matrice funzione d'una variabile indeterminata è piuttosto pesante trattandosi anche di calcolo simbolico. Mostriamo come sia possibile calcolare i coefficienti di $P(x)$ quali incognite d'un sistema lineare determinato di ordine n, e quindi con calcolo numerico che può anche evitare il calcolo di determinanti (per esempio risolvendo il sistema con metodi del tipo di quello di Gauß). La possibilità si basa sul teorema secondo il quale, se $P(x)$ è il polinomio caratteristico della matrice quadrata A, allora $P(A)$ è la matrice nulla. Sia ora ν_0 un vettore non nullo e non autovettore di A, sia $\nu_k = A^k\nu_0$ per ogni k naturale e sia infine:

$$P(x)=x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0. \qquad (1)$$

Detti $\boldsymbol{N}$ la matrice nulla e $\mathbf{0}$ il vettore nullo, essendo $\boldsymbol{N}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $P(A) = \boldsymbol{N}\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_k=A^k\,\mathbf{v}_0$, risulta $P(A)\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, ossia:

$$a_0\mathbf{v}_0 + a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = -\,\mathbf{v}_n \qquad (2)$$

Data allora A, è possibile calcolare il suo polinomio caratteristico scegliendo un vettore arbitrario non nullo $\mathbf{v}_0$, calcolando $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_0$ (e modificando $\mathbf{v}_0$ se risulta essere un autovettore) e quindi $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$ e risolvendo infine il sistema (2) nelle incognite $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ che sono i coefficienti di $P(x)$ (essendo sempre $a_n = 1$).

Come esercizio applicativo, calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A secondo il metodo esposto partendo da certo $\mathbf{v}_0$ quando fosse:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{bmatrix}; \qquad V_0=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad (3)$$

e controlliamo poi il risultato ricalcolando $P(x)$ secondo la definizione. Abbiamo allora:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}.$$

Si rileva che $\boldsymbol{v}_0$ non è un autovettore. Quindi:

$$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\21\\29\end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}20\\21\\29\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}119\\120\\169\end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare da risolvere – giusta la (2) – è dunque:

$$\begin{cases} 3a_1+20a_2=-119\\ a_0+4a_1+21a_2=-120\\ a_0+5a_1+29a_2=-169.\end{cases} \qquad (4)$$

Sottraiamo la 2ª equazione alla terza, moltiplichiamo il risultato per 3 e associamolo alla 1ª equazione:

$3a_1 + 20a_2 = -119;$

$3a_1 + 24a_2 = -147.$

Da qui abbiamo:

$4a_2 = -28 \quad => \quad a_2 = -7;$

$3a_1 + 20(-7) = -119 \quad => \quad 3a_1 = 21 \quad => \quad a_1 = 7.$

Infine, dalla 2ª di (4):

$a_0 + 4\cdot 7 + 21\cdot(7) = -120 \;=>\; a_0 = -120+17\cdot 7 => a_0 = -1.$

Pertanto:

$P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x - 1.$

Controlliamo ora il risultato calcolando $P(x)$ secondo la definizione (e il determinante con la *regola di Sarrus*):

$$P(x)=\det\begin{bmatrix}x-2&-1&-2\\-1&x-2&-2\\-2&-2&x-3\end{bmatrix};$$

$P(x) = (x^2 - 4x + 4)(x-3) -4 -4 -4(x-2) -4(x-2)-(x-3);$

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x -3x^2 + 12x -12 -8 -8x+16 -x+3;$

$P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x -1.$

Convegno internazionale

Gian-Carlo Rota memorial conference

25, 26, 27 aprile 2002
Centro Turistico San Colombo
Via Provinciale Km.4, Barisciano (AQ)
www.sancolombotur.com

Organizzazione e segreteria
M.Cerasoli, M.Maravalle (Univ. di L'Aquila):
mceraso@tin.it Tel. 3471562833
Info: http://space.tin.it/scienza/maurocer

Equazione della geodetica

di Paolo Di Sia

L'equazione della geodetica è l'equazione del moto per una particella libera in uno spazio curvo, oppure, dicendo in modo alternativo, l'equazione del moto di una particella in un campo gravitazionale. In uno spazio piatto la geodetica è una linea retta, in uno spazio curvo non è più tale (è comunque la linea di minor percorso tra due punti). Lo spazio curvo sostituisce il campo gravitazionale: una particella in moto in un campo gravitazionale equivale al moto della stessa in uno spazio curvo senza il suddetto campo. Se consideriamo un sistema di riferimento "in caduta libera" eliminiamo localmente l'effetto del campo gravitazionale. Mediante le leggi di trasformazione da sistemi inerziali a non inerziali si puo' dedurre l'effetto della gravitazione a partire da ciò che si osserva nel sistema in caduta libera.

Supponiamo di avere una particella in tale sistema; non ci sono forze, pertanto la sua velocità è costante. In quattro dimensioni, considerando la quadrivelocità, possiamo scrivere:

$u^i = costante = d\xi^i / d\tau$

dove: $\xi^i = (t, x, y, z)$ sono le coordinate nel sistema in caduta libera;

$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j$ rappresenta il quadrato dell'intervallo spazio-temporale con metrica pseudo-euclidea η_{ij} (matrice 4 x 4 con diagonale: 1, –1, –1, –1).

Nel sistema di laboratorio (che consideriamo inerziale) le coordinate sono funzioni invertibili di quelle del sistema in caduta libera: $x^\mu = x^\mu(\xi^i)$; $\xi^i = \xi^i(x^\mu)$.

Possiamo pertanto riscrivere la quadrivelocità nel seguente modo:

$u^i = d\xi^i / d\tau = (d\xi^i / dx^\mu)\cdot(dx^\mu / d\tau) = V_\mu^i \cdot(dx^\mu / d\tau) = cos\,t$

$(d\xi^i / dx^\mu) = V_\mu^i = tetrade$

Derivando rispetto a τ si ottiene:

$(du^i / d\tau) = 0 = (dV_\mu^i / d\tau)\cdot(dx^\mu / d\tau) + V_\mu^i\cdot(d^2 x^\mu / d\tau^2)=$
$(\partial V_\mu^i / \partial x^\rho)\cdot(dx^\rho / d\tau)\cdot(dx^\mu / d\tau) + V_\mu^i\cdot(d^2 x^\mu / d\tau^2)$

Moltiplicando ora ambo i membri della relazione precedente per $(V^{-1})_i^{\nu}$, considerando che $(V^{-1})_i^{\nu}\, V_\mu^i = \delta^\nu_\mu$ e introducendo la connessione affine:

$$\Gamma^\nu_{\mu\rho} = V^{-1}{}^\nu_i \frac{\partial V^i_\mu}{\partial x^\rho}$$

si ottiene l'equazione della particella nel sistema di laboratorio:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

che, moltiplicando ambo i membri per m, puo' essere riscritta nella forma:

$$F^\nu = m\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = -m\,\Gamma^\nu_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}$$

che è l'equazione cercata.

Bibliografia: [B.1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*: *principles and applications of the general theory of relativity*, NY J. Wiley and Sons; [B.2] V. De Sabbata, *Einstein e la relativita'*, Corso Editore, Ferrara

L'equazione di Fibonacci

L'equazione alle differenze finite di *Fibonacci* è:

$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \quad , \qquad \forall\, n\in\mathbf{N},\, n>1,\, F_0=0\, ,\, F_1=1.$

Essa genera la seguente successione di numeri naturali:

$0_0,\ 1_1,\ 1_2,\ 2_3,\ 3_4,\ 5_5,\ 8_6,\ 13_7,\ 21_8,\ 34_9,\ 55_{10},\ 89_{11},\ 144_{12},\ \ldots$

Considerando l'operatore B tale che $BF_n=F_{n-1}$, si ottiene:

$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \qquad ; \qquad F_n=BF_n+B^2F_n$

$F_n(1 - B - B^2)=0 \qquad ; \qquad B= -(1\pm\sqrt{5}) / 2.$

Da qui si arriva alla formula chiusa di *Euler-Binet*:

$F_n = (1/\sqrt{5})\cdot[((1+\sqrt{5})/2)^n - ((1-\sqrt{5})/2)^n] \qquad , n\in\mathbf{N}.$

Essa può essere ottenuta anche mediante l'uso delle funzioni generatrici. I numeri di *Fibonacci* hanno assunto una notevole importanza come descrittori di numerosi fenomeni naturali: dalla crescita di una popolazione biologica in assenza di predatori, alla disposizione nella testa dei girasoli delle spirali di fioretti che si avvolgono secondo i numeri di *Fibonacci*, all'albero genealogico delle api e così via. *Kiefer*, nel 1953, ha dimostrato che la serie di *Fibonacci* consente la ricerca di massimi e minimi di funzioni non derivabili in certi intervalli.

Bibliografia: Graham, Knuth, Patashnik, Matematica discreta, Hoepli, Milano, 1989