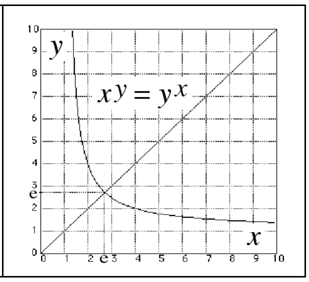
# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 53 – maggio 2002


## Rappresentabilità di insiemi ordinati mediante insiemi

di Ruggero Ferro

Abbiamo introdotto gli insiemi ordinati [1] nell'intento di considerare degli elementi in un certo ordine, ed abbiamo osservato, in particolare per le coppie ordinate, che gli insiemi ordinati sono ben altra cosa rispetto agli insiemi con gli stessi elementi: in effetti nella nozione di insieme ordinato ci sono ulteriori informazioni rispetto a quelle fornite da un insieme, precisamente le informazioni sull'ordine in cui vengono considerati gli elementi. Ci si può domandare se queste ulteriori informazioni possono essere indicate mediante la considerazione di opportuni insiemi, o se, al contrario, la nozione di insieme è insufficiente per rappresentare l'ordine. Di fatto, ci sono insiemi, costruiti a partire dagli elementi di un insieme ordinato attraverso alcune opportune operazioni, che si comportano proprio come l'insieme ordinato di partenza, cioè permettono di distinguere quali degli elementi che stiamo considerando vanno considerati prima e quali dopo.

Ad esempio, l'insieme $\{\{x\},\{x, y\}\}$ ottenuto a partire dagli elementi $x$ e $y$ permette di convenire che l'elemento $x$ è stato considerato prima dell'elemento $y$. Infatti, i ruoli di $x$ e di $y$ possono essere differenziati come si vede dal seguente risultato la cui dimostrazione è lasciata come esercizio di un certo impegno al lettore: $\{\{x\},\{x, y\}\}=\{\{u\},\{u, v\}\}$ se e soltanto se $x=u$ e $y=v$. Potendo distinguere tra gli elementi $x$ e $y$ nel modo detto possiamo ora convenire di prendere come primo elemento della coppia l'elemento di cui consideriamo l'insieme che contiene lui solo, e come secondo elemento della coppia l'altro elemento che compare nell'insieme coppia dei due elementi. Così identifichiamo la coppia ordinata $(x, y)$ con l'insieme $\{\{x\},\{x, y\}\}$. Di fatto si è aggiunta all'insieme $\{x, y\}$, i cui elementi sono appunto $x$ e $y$, l'informazione su quale elemento va considerato per primo.

Qualcosa di analogo si può fare anche con le terne, le quaterne e, in generale, le $n$-uple ordinate: basta dire che l'ultimo elemento viene dopo dei precedenti. Ciò si può fare considerando la coppia ordinata il cui primo elemento è costituito dall'insieme ordinato degli elementi che precedono l'ultimo, e il cui secondo elemento è proprio l'ultimo, sinteticamente:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) = \{\{(a_1, a_2, \dots, a_n)\}, \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n\}\}.$$

Nell'ultima scrittura di questo insieme ordinato è ancora utilizzata la notazione degli insiemi ordinati, ma questa volta con $n-1$ elementi. Proseguendo con questo metodo possiamo eleminare la notazione degli insiemi ordinati con $n-1$ elementi introducendo quella di altri insiemi ordinati con $n-2$ elementi, e così via fino alle coppie ordinate e infinite senza utilizzare insiemi ordinati per rappresentare l'insieme ordinato di partenza. Così, per esempio:

$$(a, b, c) = ((a, b), c) = \{\{(a, b)\}, \{(a, b), c\}\} = \{\{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}\}.$$

In questa riconduzione degli insiemi ordinati a particolari insiemi, finora sono rimasti esclusi gli insiemi ordinati con un solo elemento, cioè del tipo *(a)*, chiamiamoli *un-uple* ordinate. Poiché nel passare dalla rappresentazione insiemistica delle *n-uple* ordinate a quella delle $(n+1)$-*uple* ordinate aumenta di due il numero massimo di parentesi graffe all'interno delle quali si può trovare un elemento dell'insieme ordinato, e questo numero è due per la rappresentazione delle coppie ordinate, risulta opportuno rappresentare insiemisticamente l'insieme ordinato con un solo elemento, $(a)$, mediante il solo elemento $a$. A posteriori questa scelta risulta essere consona con uno sviluppo della teoria senza dover formulare eccezioni per casi particolari.

Poiché la matematica trascura la natura degli oggetti che considera per registrare, invece, il loro comportamento, può risultare opportuno pensare agli insiemi ordinati finiti proprio come gli insiemi non ordinati più complessi con i quali li abbiamo identificati, riducendo così il numero delle nozioni iniziali da introdurre, dovendo accettare come contropartita una maggiore complicazione tecnica e la necessità di giustificare l'identificazione introdotta osservando l'uguaglianza di comportamento (come abbiamo fatto).

[1] *Si leggano i miei articoli sugli arretrati di MatematicaMente.*

## Quali $x$ ed $y$ razionali per $x^y=y^x$ ?

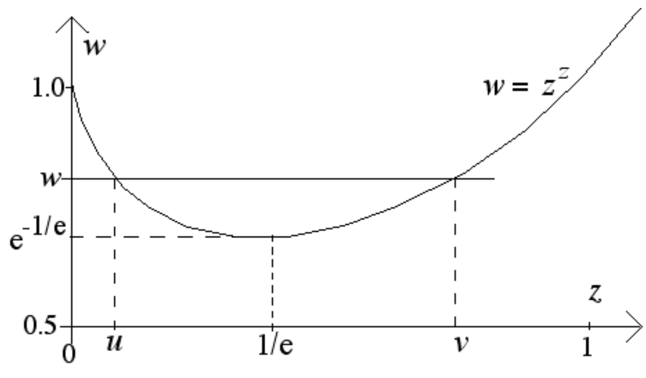
di Arnaldo Vicentini

Sul *Periodico di matematiche* del 1995, (Serie VII – Volume 2- Numero 4 - Ott.-Dic.), nella rubrica *Antologia,* curata da Aldo Morelli, venivano ricordati un quesito apparso nel 1890 sulla stessa rivista e la discussione dello stesso nelle forme presentate da altrettanti soci nostri antenati. Si trattava di stabilire per quali coppie di interi distinti $(x, y)$ fosse verificata l'uguaglianza $x^y = y^x$. La domanda, che ha per risposta "Solo (4, 2) e (2, 4)", offriva l'occasione per lo studio della funzione $F(x, y) = x^y - y^x$ e, in particolare, della funzione implicita $y=f(x)$ definita dalla equazione $F(x, y) = 0$, ossia da $x^y = y^x$.

L'ultima equazione - limitandoci al caso di $x$ ed $y$ entrambi reali positivi – può essere trasformata in un'altra equivalente a variabili separate. Elevando, infatti, entrambi i membri all'esponente $1/(x\,y)$ si ha:

$$x^y = y^x \iff x^{1/x} = y^{1/y} \iff (1/x)^{1/x} = (1/y)^{1/y}. \qquad (1)$$

La figura qui sotto mostra il grafico della funzione $w= z^z$.




Dato $w$ tra $(1/e)^{1/e}$ e 1 esclusi, sono due i valori distinti di $z$ per i quali $z^z = w$. Siano essi $u$ e $v$. Allora, $x=1/u$ ed $y=1/v$, (oppure $x=1/v$ ed $y=1/u$) verificano le equazioni (1). Una delle infinite soluzioni è appunto: $x=4$ e $y=2$ (oppure $x=2$ e $y=4$). Comunque, essendo entrambi $u$ e $v$ positivi e minori di 1, entrambi $x$ ed $y$ sono maggiori di 1.

Chiediamoci ora quali coppie $(x, y)$ di reali che soddisfano le (1) abbiano $x$ ed $y$ entrambi razionali distinti. Se $(x, y)$ soddisfa le (1), allora le soddisfa anche $(y, x)$; perciò possiamo ridurci a considerare $x > y$.

Per $x > y$ con $x$ ed $y$ entrambi razionali e maggiori di 1, anche $x/y$ è razionale maggiore di 1. Poniamo allora $x/y = m/n$, con $m$ ed $n$ interi positivi, $m > n$ e $m/n$ irriducibile, ossia MCD($m$, $n$)=1. Dalla prima delle (1), elevando entrambi i membri alla $1/y$ e sostituendo y con $(n/m)x$ otteniamo:

$$x = \left(\frac{n}{m}x\right)^{\frac{m}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}} ;$$

$$y = \frac{n}{m}x = \frac{n}{m} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}} .$$

Affinché $x$ ed $y$ siano entrambi razionali occorre e basta che entrambi $m$ ed $n$ siano multipli di $m$-$n$. Ma $m/n$ è irriducibile: perciò $m$-$n$ = 1, ossia $m$= $n$ +1. Con ciò, le coppie di razionali che soddisfano le (1) sono costituite dai termini corrispondenti delle successioni $\{x_n\}$ ed $\{y_n\}$ così definite:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad ; \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad ; \quad ... \qquad (2)$$

Si noti che il limite di $\{y_n\}$ è la definizione del *numero di Napier* $e$, il quale è anche il limite di $\{x_n\}$. Anzi: le due successioni costituiscono una coppia di classi contigue di razionali separate dal trascendente limite comune. Il fatto che $1+1/n$ sia intero solo per $n$ =1 mostra che gli unici interi che soddisfano le equazioni (1) sono $x$=4 e $y$=2 (oppure, simmetricamente, $x$= 2 e $y$=4). Il che risolve il quesito iniziale posto ai nostri antenati. In tal caso anche $x^y = y^x = 16$ è intero. Per ogni altra coppia ($x_n$, $y_n$) di razionali dati dalle (2), $x^y = y^x$ è irrazionale algebrico.
Infatti risulta in generale:

$$x_n^{y_n} = y_n^{x_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} .$$

*Si veda anche F. Nuzzi, "Qual è il più grande: a$^b$ o b$^a$ ?", MatematicaMente n. 26, febbraio 2000.*

# Un teorema di incompletezza

di Vincenzo Zamboni

*[Segue dal numero 52]* A volte alcune di queste teorie vengono fuse tra di loro, formando una unica teoria di portata più generale, come è accaduto nel XIX secolo per l'elettromagnetismo, con Maxwell, e nel XX secolo con l'unificazione delle forze elettrodeboli. Di solito, chi riesce in simili imprese, riceve il Nobel (perlomeno da quando il Nobel esiste). Simili successi sono molto soddisfacenti e stimolano i fisici a inseguire l'unificazione di tutte le TP in un'unica TU (o TG, teoria generale). È stata prodotta un'enorme quantità di sforzi, in questo senso, come è testimoniato dalla letteratura scientifica. Niels Bohr, come altri, era insoddisfatto dalla incompletezza della teoria quantistica, e ipotizzava che essa fosse dovuta all'esistenza di alcune "variabili nascoste", cioè grandezze per ora a noi sconosciute e perciò non considerate, e che fosse la loro assenza a rendere incompleta la teoria. Come si vede, ciò corrisponde proprio all'idea che qualcosa ci sfugga fin dall'inizio, nel momento stesso in cui viene costruita una teoria. L'idea di Bohr era che se fossero individuate queste variabili nascoste, e incluse adeguatamente nella trattazione dei problemi, la teoria quantistica avrebbe potuto perdere la sua indeterminatezza, e diventare completa e determinata. Era un'ottima idea, che, purtroppo, è rimasto allo stato di programma, non attuato. Anche Einstein pensava che le quattro forze fondamentali della natura (elettromagnetiche, nucleari deboli, nucleari forti, gravitazionali, ammesso che non ne vengano scoperte, prima o poi, altre) dovessero essere soggette a una unificazione, e ha dedicato la seconda parte della sua vita a inseguire questo obiettivo. Molti altri, oltre a lui, si sono impegnati nella stessa impresa, e qualche successo parziale è stato ottenuto. Tuttavia, anche l'unificazione generale delle forze rimane, per ora, un programma inattuato. Possiamo analizzare questo stato di cose dal punto di vista della fisica, e dal punto di vista della matematica (benché questo due scienze non siano separate).
Dal punto di vista della fisica, possiamo descrivere la situazione nei termini seguenti. La realtà dell'universo è, di per sé, unitaria. L'insieme dei fenomeni che possiamo in varie maniere (dirette e indirette) osservare e percepire è un insieme di parti tutte in relazione reciproca, e tutto si svolge unitariamente proprio come si deve svolgere (se si dovesse svolgere in un altro modo, lo farebbe). Il problema nasce quando noi cerchiamo di costruire rappresentazioni, modelli della realtà, il che, dal punto di vista dei fisici, deve godere di un requisito: il modello, oltre che darci la sensazione di "spiegare" qualcosa (cioè di ricondurre i fatti a conseguenze di qualcosa altro ci sia già noto) deve avere qualche capacità predittiva: deve metterci in grado di prevedere, date certe premesse, alcuni eventi che si verificheranno in futuro. Se una teoria non mostra capacità predittive, i fisici la scartano, la considerano non fisica.

Posto che la realtà è un fatto unitario (anzi: siamo noi che la consideriamo suddivisa in fenomeni, ciò che corrisponde a nostre esigenze di organizzazione del pensiero), è bene chiedersi: abbiamo qualche motivo per poterci dire sicuri che anche la nostra rappresentazione della realtà possa essere unitaria, completa, e possa dunque organizzarsi in una teoria generale unitaria, TU? Detto in altri termini: possiamo dirci certi che la nostra conoscenza della realtà abbia la capacità di essere unitaria e generale, e che la mancanza di una teoria unitaria derivi solo dall'inadeguatezza degli apparati tecnici di conoscenza adottati finora? Molti fisici ritengono che quando sarà scoperto qualche principio teorico nuovo e alcuni strumenti matematici nuovi il programma di generalizzazione potrà essere completato. È, naturalmente, una opinione legittima, ma è anche legittimo essere scettici, a meno che non siamo disposti a rivoluzionare completamente il nostro concetto di "conoscenza". Proverò a spiegare perché.

Poniamo l'attenzione a come si svolge la formazione di qualsiasi modello o teoria. Così come abbiamo visto nel semplice esempio cinematico citato all'inizio del discorso, ogni volta selezioniamo alcuni aspetti della realtà che vogliamo descrivere, consideriamo solo alcune grandezze come significative e rilevanti, cerchiamo di individuare relazioni e regole che coinvolgano queste grandezze, e su questa base costruiamo un modello. Ciò significa che, per quanto il modello e la teoria del suo funzionamento siano poi sviluppati con grande cura da un punto di vista formale, c'è, all'origine, una riduzione di realtà, e questa riduzione è sempre stata, fino a oggi, parte intrinseca della formazione di tutti i processi detti scientifici.

$$\textit{Realtà} \rightarrow \boxed{\textit{Riduzione della realtà}} \rightarrow \boxed{\textit{Modelli e teorie}} \rightarrow \textit{Risultati}$$

Fig. 1

Sia chiaro che non c'è niente di male nel procedere in questo modo, a patto che si sia consapevoli dei suoi limiti. Possiamo costruire modelli fatti di numeri, matematica, idee, logica formale e intuizione (benché citata a volte con sospetto , l'intuizione è, nei fatti, un ingrediente fondamentale del lavoro scientifico), e queste rappresentazioni possono funzionare così bene, per certi aspetti, da permetterci di costruire macchine e motori di cui prevediamo il funzionamento, o di predire in varie circostanze come si comportino mesoni, barioni e leptoni. Le teorie parziali, TP, funzionano benissimo per una lunga serie di scopi. Ma non per tutti. La fig. 1 serve ad evidenziare il fatto che una teoria è una sorta di "macchina logica" che elabora le informazioni ricevute in ingresso. L'attività formale del ragionamento non produce, in uscita, informazioni in più rispetto a ciò che abbiamo inserito in ingresso. Il ragionamento logico (dell'algebra, della geometria, dell'analisi matematica, della statistica …) serve a rielaborare e riordinare l'informazione iniziale in modo tale da mettere in evidenza aspetti che non erano evidenti nella formulazione originale, mentre, quando si arriva alla fase del risultato, diventano evidenti e comprensibili. [*Segue al numero 54*]