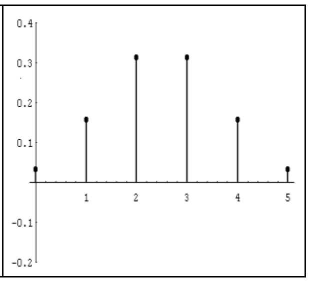
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 54 – giugno 2002



Qualche considerazione sulla $\sqrt{m}$

di Francesco Masedu [1]

Summary

This article gets a simple result concerned the irrationality of the square root of an integer, setting a sufficient condition in order to hold that $\sqrt{m}$ is irrational.

Premessa

Da sempre i numeri irrazionali costituiscono un tema di interesse dominante per i matematici, un luogo privilegiato per prendere contatto con enti che non hanno un carattere immediatamente intuitivo. In tal senso risulta sempre attuale sul piano didattico fare un esercizio di approfondimento sui numeri irrazionali facendo emergere, seppure con mezzi elementari, la capacità della matematica di caratterizzare contesti in cui l'intuizione non aiuta a chiarire le categorie in gioco. Queste poche righe per rendere "legittimo" se non "chiaro" il contenuto pedagogico di un approfondimento sui numeri irrazionali che con metodi elementari consegue una condizione per l'irrazionalità della radice di un numero intero.

Un condizione sufficiente per l'irrazionalità della radice di un numero intero

Riportiamo subito quanto vogliamo dimostrare per poi percorrere i passi logici necessari.

Proposizione (Criterio del 4). Sia $m \in \mathbf{N}$. Se il resto della divisione di m per 4 è diverso da 0 oppure 1, allora $\sqrt{m}$ è irrazionale.

Il "Criterio del 4" è una condizione sufficiente per l'irrazionalità della radice di un numero intero. Per la $\sqrt{2}$ risulta $2 = (0)(4)+2$. Dunque certamente la $\sqrt{2}$ è un numero *irrazionale*. Tuttavia data la sufficienza della condizione se la divisione fornisce un resto uguale a 0 o 1 non possiamo concludere nulla sulla irrazionalità di $\sqrt{m}$.

Per la dimostrazione abbiamo bisogno di due lemmi.

Lemma 1. Se m è un quadrato perfetto allora il resto della divisione per 4 è 0 oppure 1.

Lemma 2. Se $\sqrt{m}$ è razionale allora m è un quadrato perfetto.

Dimostrazione del lemma 1: Per ipotesi $m = d^2$ inoltre $d = 4q+r$ con $0 \le r < 4$. Quindi $r = 0, l, 2, 3$. Sostituendo: $m = (4q+r)^2 = 16q^2 + 8qr + r^2$. Se sostituiamo ancora i valori di r ammissibili risulta:

$r = 2 \Rightarrow m=16q^2 +16q +4= 4(4q^2 +4q+4)+(r = 0)$

$r = 3 \Rightarrow m = 16q^2 + 24q + 9 = 4(4q^2 + 6q + 2)+ (r = 1)$

Il resto di m diviso 4 è sempre 0 oppure 1.

Dimostrazione del lemma 2: Se $\sqrt{m}$ è razionale allora $\sqrt{m}=a/b$, con $a,b\in\mathbf{Z}$. Quindi $m = a^2/b^2$. Possiamo usare il teorema fondamentale dell'aritmetica per fattorizzare in numeri primi rispettivamente a e b:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}\ ,\ b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k}\ ;$$

da cui, elevando al quadrato e dividendo otteniamo:

$$a^2 / b^2 = p_1^{2(e_1-f_1)} p_2^{2(e_2-f_2)} \dots p_k^{2(e_k-f_k)}$$

che risulta essere un quadrato perfetto:

$$m = \left(p_1^{(e_1-f_1)} p_2^{(e_2-f_2)} \dots p_k^{(e_k-f_k)} \right)^2$$

La dimostrazione del "Criterio del 4" diventa a questo punto una questione di logica.

Dimostrazione del Criterio del 4: Se contrapponiamo il lemma 2 $((\alpha\to\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\to\neg\alpha))$ risulta che: se m non è un quadrato perfetto allora $\sqrt{m}$ è irrazionale. Contrapponendo il lemma 1 otteniamo che se il resto della divisione per 4 è diverso da 0 ed 1 allora m non è un quadrato perfetto.

Combinando questa catena di implicazioni materiali si ottiene il risultato cercato.

Bibliografia: Curzio M, Longobardi P, Maj M (1994) Lezioni di algebra. Liguori editore, Napoli. Baker A (1984) A concise introduction to the Theory of Numbers. Cambridge University Press, Cambridge.

[1] dottore presso l'Università degli Studi de L'Aquila, Facoltà di Medicina e Chirurgia. e-mail: *francesco.masedu@cc.univaq.it*

Un teorema di incompletezza

di Vincenzo Zamboni [2]

[*Segue dal numero 53]* Scritte le condizioni iniziali e le equazioni del moto, le condizioni ad un tempo t vi sono già contenute implicitamente. La risoluzione delle equazioni del moto serve a rendere esplicito quel particolare aspetto del problema che volevamo conoscere (ad esempio: s, v e a all'istante t), ma il risultato non contiene un grado di informazione maggiore di quella fornita in ingresso: ha solo modificato la struttura dell'informazione in modo da esplicitare ciò che ci interessava. Ma non ha aggiunto niente, a volte, caso mai, può avere tolto; cioè, allo studio del risultato può darsi che otteniamo meno informazione totale di quella che avevamo all'inizio; comunque, non di più. Il ragionamento riorganizza l'informazione in modo da selezionare ciò che ci serve.

Può darsi che la cosa risulti più chiara se dico che un sistema algebrico di 1° grado (non del genere impossibile) contiene già implicitamente la sua soluzione, e che il calcolo serve solo a selezionare tale informazione, in modo da renderla evidente. Dire: "Un numero moltiplicato per due dà sei, e aggiunto a uno dà quattro" contiene implicitamente la conseguenza "il numero tre". La seconda frase non contiene più informazione della prima, anzi, in questo esempio, ne contiene di meno, perché non richiede che siano definite le operazioni di somma e moltiplicazione: possiamo definire il numero 3 senza definire le operazioni. Allora, in genere, se consideriamo l'informazione precedente a un calcolo (I_1), e quella conseguente (I_2), vale la disequazione $I_1 \ge I_2$. (2)

Il fatto che la macchina dell'analisi e del ragionamento conservi la quantità di informazione o la diminuisca (senza accrescerla) non è negativo, né deludente. L'analisi e il calcolo servono a selezionare dalla massa di informazioni disponibili quelle di cui, per qualche motivo, abbiamo deciso di avere bisogno. Così, anche se non si accresce la quantità totale di informazione, si accresce la quantità di informazioni che riteniamo utili.

Di fronte a un sistema meccanico classico, fatto di leve, travi, sbarre, pilastri e vincoli, le equazioni cardinali della statica, unitamente alle condizioni iniziali, contengono molta informazione. Ma l'ingegnere che le usa ha bisogno di estrarre ciò che davvero gli serve: vuole sapere se certi valori di forze applicati in punti determinati sono fonte di equilibrio stabile oppure no. I calcoli necessari a "risolvere" il sistema gli servono proprio a questo: mettono in evidenza dei numeri che prima erano solo implicitamente definiti da una serie di condizioni. La frittata matematica è stata girata e rigirata fino a vedere la faccia che interessava vedere. Ma il calcolo non ha aggiunto nulla alla frittata iniziale (ne ha solo prodotto altre forme equivalenti o, a volte, sottoequivalenti).

Indichiamo con il termine di "informazione utile" (I_u), l'insieme dei dati che cerchiamo di trovare attraverso i calcoli e i ragionamenti. Allora possiamo dire che un buon modello e una buona teoria sono quelli che, usati, trasformano una quantità di informazione con un basso contenuto di I_u in una informazione finale con un grande contenuto di I_u:

$$\begin{cases} I_1 \\ I_{u1} \le I_1 \end{cases} \to Calcolo\ e\ ragionamento \to \begin{cases} I_2 \\ I_{u2} \le I_2 \end{cases} \qquad (3)$$

con $I_2 \le I_1$ (4), ma $I_{u2} > I_{u1}$ (5). Ora si vede che non ha importanza il fatto che l'informazione totale non si accresca, e possa anche diminuire: quella che ci interessa è la informazione utile, e costruiamo teorie che accrescano tale I_u. Naturalmente, il concetto di informazione utile non è una proprietà intrinseca del sistema, bensì è definito dall'osservatore, ed è ampiamente variabile, poiché dipende da ciò che ci interessa. Quando il negoziante ci comunica il conto alla cassa non vogliamo che ci dica "un valore equivalente alla somma di 2,5 più 1,45 cui sia aggiunto 3,5 e anche 1,55": vogliamo che ci dica "9 euro" e basta. Però, se sospettiamo che il negoziante sia disonesto possiamo avere interesse per lo scontrino e i suoi dati parziali (che avevamo già noiosamente osservato sugli scaffali, e siamo pure stufi di leggerli). È una decisione nostra , dato che, come tutti gli umani, i negozianti includono sia persone oneste che disoneste, e dipende da noi stabilire i criteri in base ai quali siamo disposti a fidarci di alcuni e di altri no. Una affermazione del tipo "Anche i negozianti onesti pur non volendolo, ogni tanto si sbagliano (dato che sbagliare fa parte delle modalità dell'agire umano)" può indurci a decidere che tutti i dati dello scontrino sono da leggere e controllare ogni volta, oppure che non ne vale la pena, dato che su un grande numero di scontrini ogni errore casuale in eccesso sarà bilanciato da un altro errore casuale in difetto, pareggiando il totale dei totali; la motivazione può anche essere che non abbiamo voglia di controllare gli scontrini, perché è una attività noiosissima. Quindi, il concetto di informazione utile è estremamente variabile, e la sua variabilità dipende dall'osservatore (stavamo osservando il conto della spesa), non dal fenomeno in sé (di fronte allo stesso commerciante vari clienti possono comportarsi in modo diverso). *[Segue al numero 55]*

[2] Fisico, in quel di Verona

La scommessa pascaliana e la razionalità di Dio

di Luciano Corso

Nel libro "Pensées" di Blaise Pascal (n. 1623, m. 1662) (Pascal – Oeuvres complètes - Editions Gallimart – France – Bibliothèque de la Pléiade – 1954 – pagg. 1212 e segg.) si legge che all'uomo, se gli si impone di scommettere sull'esistenza di Dio, conviene puntare sulla Sua esistenza, piuttosto che no. Infatti, la posta in palio è alta e se si vince, il guadagno è altissimo (il Paradiso) rispetto al basso prezzo che si deve pagare per giocare (una vita che, in fondo, deve rinunciare a poco - alla lascivia e ai divertimenti egoistici e lussuriosi); se, invece, si perde (solo nel caso che Dio non esista) si perderebbe solo il piacere di vivere una vita solo un po' migliore di quella che altrimenti si sarebbe vissuta. Al contrario, se si scommette sulla non esistenza di Dio, si avrebbe una vita migliore qui sulla Terra, ma si potrebbe perdere l'immensa felicità del Paradiso, se Dio esiste, altrimenti si guadagnerebbe qualcosa di vita migliore sulla Terra. La scommessa di Pascal risulta orientata sugli interessi dell'uomo; questi, con un calcolo da abile giocatore deve decidere al meglio non sapendo se Dio esiste o no (la condizione di massima entropia impone di assegnare alla probabilità della Sua esistenza il valore ½. Pascal vincola l'uomo all'obbligo di giocare sottoponendolo a un rischio - costo per una decisione sbagliata - e simula una partita basata su un lancio di moneta con due esiti possibili: testa=«Dio esiste» o croce=«Dio non esiste»). Un comportamento razionale per l'uomo è dunque quello di credere per convenienza: la funzione di utilità per lui risulta massima solo in questo caso. In questo gioco, però, Pascal ha dimenticato che c'è un altro giocatore: Dio.

Dio è razionale? Si deve supporre di sì, dato che tra le categorie assolute attribuite a Dio dai teologi figurano le massime espressioni dell'intelligenza e, la razionalità, è una di queste. Sulla razionalità di Dio, propongo questa mia analisi tratta da uno spunto pubblicato da P. Odifreddi su "Il computer di Dio" (edizioni la Cortina – Milano – 2000).

Dalla teoria dei giochi consideriamo due giocatori: Dio e l'Uomo. Il gioco può essere cooperativo o competitivo. Se Dio è buono, allora il gioco deve essere cooperativo. Dio dunque non agisce per annientare l'avversario, nel conseguire il suo obiettivo, ma deve – sempre perseguendo il suo imperscrutabile disegno – anche fare l'interesse dell'uomo. In questo gioco, il rivelarsi di Dio non avvantaggia l'uomo; anzi.

Dio si può o no rivelare e l'uomo può o no credere. Dall'intersezione di queste possibilità si ottengono 4 risultati differenti (si veda la tabella):

	DIO	
UOMO	Rivelarsi (R)	Non Rivel. (¬R)
Credere (C)	C | R	C | ¬R
Non credere (¬C)	¬C | R	¬C | ¬R

Premetto che le assegnazioni di valori di utilità alle diverse decisioni prese dall'uomo, sotto le due condizioni R e ¬R sono puramente indicative.

Valutiamo (u = unità di utilità) i meriti dell'uomo: se (C|R) allora diamo un valore di utilità pari a $v_1 = 1u$ perché non ha gran merito l'uomo a credere là dove c'è evidenza; se (C|¬R) allora assegniamo un valore $v_2 = 2u$ perché ha gran merito l'uomo a credere contro ogni evidenza; se (¬C|R) allora un valore $v_3 = -2u$ perché ha un gran demerito l'uomo a non credere all'evidenza; se (¬C|¬R) allora il valore assegnato è $v_4 = -1u$ perché è umano non credere là dove non si manifestano segni. Consideriamo, inoltre, le probabilità delle diverse situazioni: se vale la tesi di Pascal, allora P(C)=P(¬C)=$1/2$; più in generale si può porre P(C)=a e P(¬C)=1-a. Ora si vede che il valore medio dell'utilità calcolato là dove Dio decide di non rivelarsi è maggiore di quello calcolato nell'ipotesi di una decisione complementare:

$$v_1 \cdot p_1 + v_3 \cdot p_3 = 1u \cdot a \cdot + (-2u) \cdot (1-a) = (3 \cdot a - 2) \cdot u \qquad (1)$$

$$v_2 \cdot p_2 + v_4 \cdot p_4 = 2u \cdot a + (-1u) \cdot (1-a) = (3 \cdot a - 1) \cdot u \qquad (2)$$

ove, come si può notare, quando $a=1/2$ in (1) si ottiene un'utilità pari a $(-1/2)u$ e in (2) un'utilità pari a $(1/2)u$. Si osserva che per $0 \le a \le 1$, $3a$-$2 \le 3a$-1 e quindi per l'uomo è vantaggioso (2) e svantaggioso (1). Poiché Dio coopera con l'uomo e per l'uomo è svantaggioso che Dio si riveli, conviene, perciò, a Dio di non rivelarsi, in un gioco cooperativo. Dunque all'uomo conviene credere e a Dio conviene non rivelarsi.