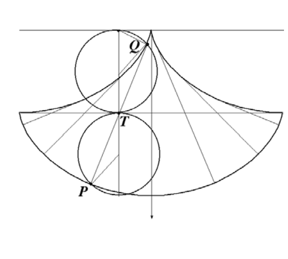
# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 56 – agosto 2002


# La cicloide e la rifrazione continua

di Arnaldo Vicentini

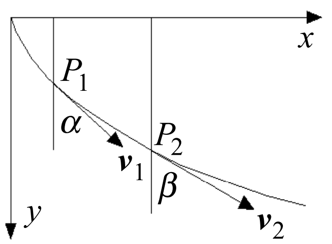
Mesi fa, sul *Periodico di matematiche*, (Serie VIII - Vol.2 - N. 2 - Apr. - Giu. 2002), A. R. Sambucini ha trattato il problema proposto nel 1696 da Giovanni Bernoulli: determinare la traiettoria che rende minimo il tempo con cui un punto materiale scende per gravità dal punto $A$ al punto $B$ con moto senza attrito e partenza da fermo. L'autrice riporta la soluzione dello stesso Bernoulli – arco di *cicloide* – basata sul presupposto che il tempo minimo corrisponda alla traiettoria che rispetta la *legge di rifrazione di Snell-Fermat*. Ma non dice come scegliere, tra le infinite cicloidi omotetiche per $A$, quella che passa anche per $B$; né riporta la legge oraria del moto (onde calcolare quel tempo minimo).

In un punto $P_1$ d'una traiettoria piana, sia $v_1$ la velocità ed $\alpha$ la sua inclinazione su una certa direzione. In un altro punto $P_2$, velocità ed inclinazione sulla stessa direzione siano $v_2$ e $\beta$. La legge di Snell-Fermat vuole che il rapporto $\sin(\beta)/\sin(\alpha)$ valga $v_2/v_1$, [*V*. Fig. 1], cioè che in qualsiasi punto della traiettoria il seno dell'inclinazione del moto su una direzione fissa sia proporzionale alla velocità.

Fig. 1

Legge di Snell-Fermat:

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}=\frac{v_2}{v_1}.$$




La legge, per due punti a distanza infinitesima, diventa:

$$\frac{\sin(\alpha+d\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{v+dv}{v}$$

che è effettivamente la legge di rifrazione continua della luce in un mezzo trasparente a permittività non uniforme, quella che spiega l'incurvarsi dei raggi di luce (e quindi le illusioni di ritardo ed eccessiva rapidità d'un tramonto, del *miraggio* e della *fata Morgana*) e consente la contenzione della luce nelle fibre ottiche flessibili.

Andiamo dunque a cercare quale deve essere il profilo d'uno scivolo *liscio* che verifichi la legge di Snell-Fermat rispetto alla direzione verticale.

Detta $g$ l'accelerazione di gravità (verticale e costante), l'accelerazione scalare $a$ vale $g\cdot\cos(\alpha)$ per ogni traiettoria *liscia.* Nel punto di partenza la velocità $v$ è nulla e crescente: lì tale deve essere $\sin(\alpha)$; perciò, lì, anche $\alpha$ dev'essere nullo e crescente. Con riferimento a quel punto, integrando *per parti* l'accelerazione, la velocità risulta:

$$v=g\int_0^\alpha \frac{\cos(\vartheta)}{d\vartheta/dt}d\vartheta=.$$

$$=g\frac{\sin(\alpha)}{d\alpha/dt}-g\int_0^\alpha -\frac{d^2\vartheta/dt^2}{(d\vartheta/dt)^2}\sin(\vartheta)d\vartheta \qquad (1)$$

È rispettata la legge di Snell-Fermat se $d\alpha/dt$, ancorché arbitraria, è costante. Diciamola $\omega/2$, per cui sarà $\alpha=\omega\cdot t/2$. Con ciò la velocità $v$ e le sue componenti $v_x$ e $v_y$ risultano:

$$v=\frac{2g}{\omega}\sin(\alpha);\ \ v_x=\frac{2g}{\omega}\sin^2(\alpha);\ \ v_y=\frac{2g}{\omega}\sin(\alpha)\cos(\alpha). \qquad (2)$$

Con riferimento al punto iniziale, detta $s$ la lunghezza della traiettoria percorsa, le (2) ci danno infine:

$$s=\int_0^\alpha \frac{v(\alpha)}{d\alpha/dt}d\alpha=\frac{4g}{\omega^2}[1-\cos(\alpha)];$$
$$x=\frac{2g}{\omega^2}[\alpha-\sin(\alpha)\cos(\alpha)];\ \ y=\frac{2g}{\omega^2}\sin^2(\alpha). \qquad (3)$$

Se chiamiamo $r$ la *lunghezza* $g/\omega^2$ - e allora $\omega=\sqrt{(g/r)}$ - e poniamo $\varphi=2\alpha=\omega\cdot t$, possiamo riassumere come segue:

$r$ : *lunghezza arbitraria*; $\omega=(g/r)^{1/2}$; $\varphi=\omega t=2\alpha$;

$$v=2\omega r\sin(\varphi/2);\quad s=8r\sin^2(\varphi/4); \qquad (4)$$
$$x=r[\varphi-\sin(\varphi)];\ \ y=r[1-\cos(\varphi)]) \qquad (5)$$

Si noti che risulta $g\cdot y=v^2/2$, come vuole il principio di conservazione dell'energia: il calo $m\cdot g\cdot y$ d'energia potenziale della massa $m$ uguaglia l'acquisto $m\cdot v^2/2$ d'energia cinetica. Basta questo principio della dinamica per avere la curva che rispetta la legge Snell-Fermat in direzione verticale. Infatti, se $v$ è proporzionale a $\sin(\alpha)$ ed $y$ è proporzionale a $v^2$, allora $y$ è proporzionale a $\sin^2(\alpha)$, cioè ad $1\text{-}\cos(\varphi)$, [per $\varphi=2\alpha$, 2ª delle (5)]. Essendo anche $dx/d\alpha=(dy/d\alpha)/(dy/dx)$ e $dy/dx=1/\tan(\alpha)$, si ricava $dx/d\alpha=4r\sin^2(\alpha)$; da cui la 1ª di (5), [per $\varphi=2\alpha$].

Infine, essendo $ds=(dx2+dy2)1/2$, si ricava $s(\varphi)$ come in (4).

Nelle (4) e (5) non risalta la linearità di $\alpha$ nel tempo. Ma basta pensare $dt=ds/v$ per trovare $dt=d\varphi/\omega$, ossia $\varphi=\omega\cdot t$.

Abbiamo dunque trovato una famiglia di curve omotetiche – di centro $O(0,0)$ – di equazioni parametriche (4) e (5). Scegliamone una precisando $r$. È una *cicloide* canonica. Questa è la curva generata da un punto sulla circonferenza d'un cerchio che rotola senza strisciare sull'asse delle ascisse; anzi, dal punto del cerchio che inizialmente sta nell'origine. [Fig. 2]. La posizione d'un punto materiale che scivola senza attrito sulla cicloide (partendo da fermo dall'origine) coincide in ogni istante con quella del punto che la genera se la velocità angolare $\omega$ del cerchio che rotola è costante e vale $\sqrt{(g/r)}$, [condizione che Sambucini non dice].

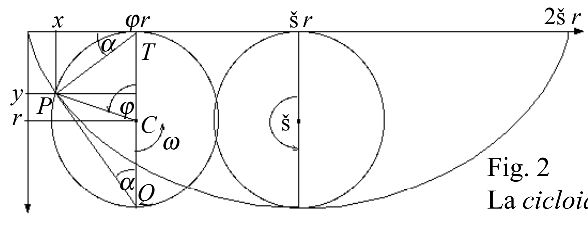



Fig. 2
La *cicloide.*

In Fig. 2 si trovano subito le (4) e le (5) per via cinematica. Dopo che il cerchio è rotolato dell'angolo $\varphi=\omega t$, l'ascissa di $T$ è $r\varphi$, quella di $P$ è $r[\varphi\text{-}\sin(\varphi)]$ e l'ordinata è $r[1\text{-}\cos(\varphi)]$. $P$ sta ruotando attorno a $T$, perciò a velocità $v=\omega PT=2\omega r\sin(\alpha)$ diretta verso $Q$ (*legge di Snell-Fermat*). L'angolo $\alpha$ alla circonferenza in $Q$ è metà dell'angolo $\varphi$ al centro in $C$; e se $\omega=\sqrt{(g/r)}$ è come se $P$ scendesse per peso sulla cicloide.

Tranne qualche caso, il determinare quale cicloide canonica passa per un assegnato punto del piano diverso dall'origine – ossia il trovare $r$ dati $x$ ed $y$ positivi – non è un problema banale. Ma, posto $p=y/x=f(\varphi)/\varphi$, è facile, dato $p$, trovare $\varphi$ e quindi $r$ da una delle due equazioni parametriche delle coordinate. L'equazione da risolvere è:

$$p\varphi = f(\varphi) = \frac{1-\cos(\varphi)}{1-\sin(\varphi)/\varphi} = 3\frac{1-2(\varphi^2/4!+\varphi^4/6!+...)}{1-6(\varphi^2/5!+\varphi^4/6!+...)}. \qquad (6)$$

Lo sviluppo in serie di numeratore e denominatore, oltre ad evidenziare che per $p$ grande è $\varphi \approx 3/p$ (e quindi $r \approx 2p^2y/9$), migliora l'accuratezza del rapporto per $p$ molto grande. La Fig. 3 dà il grafico di $f(\varphi)$. Per $p>2/\pi$ la successione:

$$\varphi_0 = \pi; \quad \forall n>0 \ \varphi_n = f(\varphi_{n-1})/p \qquad (7)$$

converge alla soluzione della (9), [metodo del punto fisso].
Se è $p=2/\pi$ allora $r=y/2=x/\pi$. Per $p$ minore di $2/\pi$ conviene usare un procedimento dicotomico ricorrente. Per esempio:

$$a_0 = 0; \ b_0 = 2\pi;$$

$$\forall n>0 \ \ m_n = (b_{n-1}+a_{n-1})/2; \ z_n = f(m_n)/p;$$

$$se\ z_n > m_n \ allora\ a_n = m_n \wedge b_n = b_{n-1} \ altrimenti$$

$$se\ z_n < m_n \ allora\ a_n = a_{n-1} \wedge b_n = m_n \ altrimenti\ \varphi = m_n.$$

Se è $p \ll 1$, è $r \approx x/(2\pi)$. Allora, per $\varepsilon = 2\pi-\varphi$, abbiamo:

$$p = \frac{1-\cos(\varepsilon)}{2\pi-[\varepsilon-\sin(\varepsilon)]} \approx \frac{\varepsilon^2/2}{2\pi} \Rightarrow \varphi \approx 2\pi - 2\sqrt{p\pi}. \qquad (8)$$

Ultime curiosità. Dalla (7) viene che la lunghezza dell'intera cicloide è $8r$. L'area $A$ tra la base e la curva vale 3 volte l'area del cerchio di genesi. Infatti:

$$A = \int_0^{2\pi} y(\varphi)\frac{dx}{d\varphi}\,d\varphi = 16r^2\int_0^{\pi/2}\sin^4(\alpha)\,d\alpha = 3\pi r^2.$$

La cicloide ha anche un'altra peculiarità del tutto speciale. Sia $P$ un punto d'una curva $\Lambda$ e siano $y'$ ed $y''$ le derivate 1ª e 2ª della funzione $y=f(x)$ rappresentata da $\Lambda$. Le coordinate del centro $C$ del cerchio osculatore in $P$ sono:

$$x_C = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}; \quad y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \qquad (9)$$

Al variare di $P$, $C$ descrive un'altra curva $\Gamma_\Lambda$, di solito nemmeno affine a $\Lambda$. Ma se $\Lambda$ è una cicloide, $\Gamma_\Lambda$ è ancora una cicloide. Per $x$ e $y$ come in (5), le (9) diventano infatti:

$$x_C = r[\varphi+\sin(\varphi)]; \quad y_C = -r[1-\cos(\varphi)]. \qquad (10)$$

Da qui, ponendo $\psi=\varphi+\pi$, possiamo scrivere:

$$x_C = -\pi r + r[\psi - \sin(\psi)]; \quad y_C = -2r + r[1-\cos(\psi)],$$

da cui risulta che $\Gamma_\Lambda$ è la traslata di $\Lambda$ col vettore $\boldsymbol{d} = -r[\pi, 2]$.

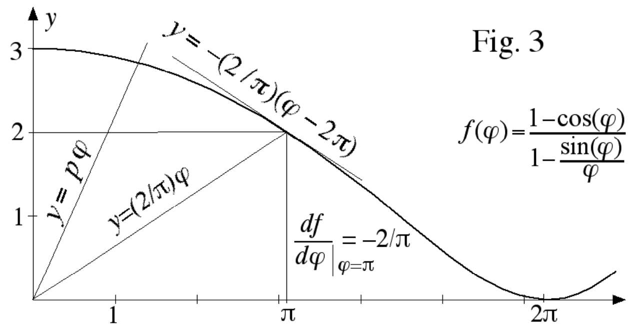


Fig. 3

# Note di didattica della matematica

di Luigi Landra [1]

Una volta si diceva che un assioma o postulato è una proposizione che afferma una proprietà di alcuni concetti, la quale viene accettata come vera *in quanto evidente*. Questa definizione è ancora valida, però con un essenziale taglio: è necessario togliere l'ultima condizione, cioè *in quanto evidente*. Inoltre, è più prudente sostituire la parola "valida" alla parola troppo impegnativa "vera".

È stato proprio il togliere la condizione *in quanto evidente* che ha consentito il notevolissimo sviluppo che si riscontra in molti rami della matematica.

Ma, sul piano didattico, è però necessario tener sempre presente quella condizione, se si vuole operare con la massima efficacia sui giovani inesperti.

Ci sono dei casi in cui una uguaglianza, in base alla sola definizione che viene data di un ente matematico, non si può determinare. È il caso, per esempio, di 0!. Ho rilevato che molto spesso si introduce 0! uguale all'unità per *convenzione*, senza però preoccuparsi che un'affermazione del genere non può che lasciare perplessi i lettori più sprovveduti. Pur non sottovalutando il rigore di chi inizia la trattazione di una teoria introducendo l'assioma 0!=1, bisogna ammettere che, per gli studenti delle scuole secondarie, può essere un approccio non sempre sufficientemente convincente e quindi, in ultima analisi, non conveniente.

Vale la pena di partire dal principio secondo il quale, per una efficace didattica della matematica, una convenzione che si introduce, deve essere sempre una relazione sufficientemente giustificata da semplici considerazioni che facciano supporre la molto presumibile validità dell'affermazione che si propone. Per il caso particolare citato penso sia consigliabile porre per convenzione 0!=1 soltanto dopo che, partendo dal teorema

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1)$$

si prenda $k=n$. Si ottiene al denominatore il fattore $(n-n)!$, ossia 0!. Al quale non si può non assegnare che il valore 1, se si vuole che tutte le relazioni che vengono introdotte nella teoria siano coerenti tra di loro.

Sempre con riferimento alla stessa teoria, mi sembra inoltre che sia una eccessiva pignoleria introdurre 1!=1 per convenzione. Questo risultato si può far scaturire semplicemente dalla definizione di fattoriale che, come è noto, afferma che un n! qualsiasi si calcola facendo il prodotto di tutti i numeri naturali partendo da 1 e arrivando ad n. In questo caso vuol dire che, partendo dal primo numero naturale che è l'unità, se ne considera uno solo, cioè l'unità stessa.

Penso, a questo riguardo, che, per l'introduzione dell'argomento, il percorso ottimale - che però non vedo seguito nella presentazione della teoria in questione nei correnti manuali scolastici – sia il seguente:
Partendo dalle semplicissime definizioni di fattoriale e di coefficiente binomiale, si passa alla altrettanto semplice dimostrazione di (1). Con quest'ultima si dimostra la legge delle classi complementari. Se poi si considera $k=n$ nell'uguaglianza corrispondente a quest'ultima legge, si ottiene l'espressione corrispondente a «$n$ su $n$» che, per definizione, è uguale all'unità. Qui appare che uno dei tre fattoriali corrisponde a 0!. Con l'unica convenzione $P_0$=0!=1, si può quindi assegnare un preciso valore ad altre notazioni, tutte uguali all'unità, come $D_{n,0}$, «$n$ su 0», "0 su 0", $C_{n,0}$, $C_{0,0}$ = $D_{0,0}/P_0$, che, mediante la semplice loro definizione, non si possono direttamente determinare.

Ritengo che questo modo di presentare la disciplina agli allievi sia anche il modo didatticamente più conveniente per introdurre, per quanto possibile, qualsiasi altro assioma in matematica, sia in ossequio al principio di economia e sia per una accattivante esposizione di ogni teoria.

*[1] Presidente della sezione di Seregno (MI) della Mathesis*