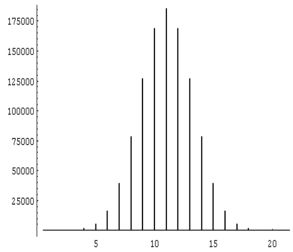
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 58 – ottobre 2002



Ancora sullo zero fattoriale

di Claudio Bernardi [1]

Ho letto la nota di Luigi Landra sul n. 56 con la risposta di Mauro Cerasoli sul n. 57, e vorrei intervenire nel dibattito. Perché si pone «0! = 1» ?

Luigi Landra cerca una giustificazione ricorrendo ai coefficienti binomiali (e io non vedo nulla di male, né a livello teorico né sul piano didattico, nel considerare due parametri, anche se nell'uguaglianza in questione non ne compare nemmeno uno), mentre Mauro Cerasoli si rifà ad un'identità caratteristica dei fattoriali. Le motivazioni esposte sono corrette, ma il discorso è interessante e penso valga la pena di aggiungere un altro paio di considerazioni. Quanto segue è un po' astratto e non facile da tradurre in un contesto didattico; ma, parlando di didattica, è opportuno poter presentare più motivazioni, perché ciò che convince Caio può non convincere Tizio, e viceversa.

1) La scrittura 0! indica un prodotto con zero fattori, come, del resto, una potenza del tipo 3^0. In generale, se un'operazione è associativa ed ammette elemento neutro u, allora conviene porre che, in *mancanza* di termini, il risultato sia u: nel caso della moltiplicazione, un prodotto senza alcun fattore è uguale ad 1. Analogamente, si accetta che una somma senza addendi (come 5×0) sia uguale a 0. Un po' più difficile è pensare all'unione di "nessun insieme", che si pone uguale all'insieme vuoto (elemento neutro dell'unione), mentre l'intersezione di "nessun insieme" è l'insieme universo (elemento neutro dell'intersezione, sempre che la teoria degli insiemi che si sta usando consenta di parlare di insieme universo).

Se invece un'operazione non soddisfa alle proprietà citate, allora è arduo attribuire un risultato nel caso manchino i termini: ad esempio, non saprei dare un valore sensato alla media aritmetica di nessun termine. Forse qualcuno potrebbe suggerire 0, ma una convenzione del genere non mi convince, perché la media aritmetica (come in fisica il baricentro) è invariante per traslazioni (se la media aritmetica di 3 e 5 è 4, allora la media aritmetica di 3 + n e 5 + n è 4 + n): traslando l'insieme vuoto di termini si ritrova lo stesso insieme, e quindi un ipotetico risultato dovrebbe essere un numero che non varia per traslazioni ...

2) Dal punto di vista della teoria degli insiemi, il fattoriale $n!$ corrisponde al numero di funzioni biiettive - o corrispondenze biunivoche - che si possono definire da un insieme con n elementi in sé stesso (o permutazioni, per usare il linguaggio del calcolo combinatorio). Ora, quante sono le funzioni biiettive fra l'insieme vuoto e l'insieme vuoto? Evidentemente *una*, la funzione vuota! Attenzione: chi rispondesse che non c'è alcuna funzione dal ∅ al ∅, direbbe che l'insieme vuoto non si può porre in corrispondenza biunivoca con sé stesso (cosa falsa, visto che i due insiemi hanno entrambi 0 elementi). Da un altro punto di vista, *per ogni* insieme X, l'identità è una funzione biiettiva da X ad X. D'altra parte, c'è una sola funzione dal ∅ al ∅, perché se ci fossero due funzioni diverse f e g, allora dovrebbe esistere (almeno) un elemento del dominio su cui f e g assumono valori diversi.

Concludo con un'osservazione forse scontata. Chi introduce il fattoriale con una definizione per induzione:

$0! = 1;\ \forall n \in \mathbf{N},\quad (n+1)! = n! \times (n+1)$

non ha alcun problema. Infatti, 0! = 1 non è più una convenzione più o meno bizzarra, ma il fondamento della definizione. Questa introduzione del fattoriale è indubbiamente un po' difficile, ma è logicamente ineccepibile e molto adatta per una traduzione in un linguaggio di programmazione.

[1] *Docente di Logica Matematica, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi de "La Sapienza" di Roma*

Zero fattoriale e zero alla zero

di Arnaldo Vicentini

Sul numero 57 di *MatematicaMente* Mauro Cerasoli criticava dal punto di vista didattico il dedurre «$0!=1$» nel modo precedentemente usato da Luigi Landra (in *MatematicaMente,* n. 56) mettendo in bocca all'ipotetico allievo Pierino la domanda: «*Caro professore, perché introdurre i coefficienti binomiali che dipendono da due parametri, n e k, per spiegare una proprietà della successione $n!$ che invece dipende da un solo parametro?*». Il prof. Cerasoli non sarebbe incorso in tale inconveniente didattico e all'eventuale Pierino che avesse chiesto delucidazioni sulla strana uguaglianza «$0!=1$» avrebbe risposto: «*La successione $n!$ gode, per $n=2, 3, \ldots$, della notevole proprietà caratteristica "$n!=n\cdot(n-1)!$". È naturale richiedere che essa valga anche per $n=1$, e quindi, ponendovi $n=1$ si ottiene $1=0!$*». Pierino, però, potrebbe replicare: «*Cosa intende di preciso con "naturale"? Per n da 2 in su $n!$ vale il prodotto di n per il precedente fattoriale $(n-1)!$. Lei dice che è naturale che ciò valga da 1 in su anziché da 2 in su, ossia che anche $1!$ è pensabile come prodotto: di 1 per $0!$ appunto. Si può pensare che la proprietà valga anche per $n=0$ e scrivere "$0!=1=0\cdot(-1)!$"? Oltre ad essere in contrasto con la "legge di annullamento del prodotto", mentre per $n=1$ la proprietà mi dava $0!=1$, per $n=0$ non mi dice quanto vale $(-1)!$…* ».

Colgo lo spunto da queste «*parabole»* per intervenire a mia volta sulla didattica di nozioni abituali – quali le potenze e la successione dei fattoriali – che sono spesso brutalmente vendute come a sé stanti, laddove - secondo me - sarebbe opportuno introdurle (o almeno rivederle proprio insegnando le successioni) inquadrandole in un discorso più ampio e generalizzato. Ho nominato anche le potenze ricordandomi della diatriba sorta tra me ed il prof. Andrea Laforgia circa il valore da assegnare a 0^0 nell'ambito dei naturali: scrittura senza significato per Laforgia, inequivocabilmente uguale a 1 per me! Per economia, userò ovviamente un linguaggio più succinto (ed anche più … *elevato*) di quello da usare in una classe di Pierini: ma posso garantire che l'approccio didattico che se ne potrà tirar fuori è confortato dalla mia lunga esperienza di insegnante al biennio di Istituti Tecnici e di Liceo Scientifico. Anticipo, inoltre, che questo approccio didattico è utilissimo nel collegamento tra la didattica della matematica e quella dell'informatica.

1) Diciamo *successione* una funzione di dominio $\boldsymbol{N}$ (insieme dei naturali). Diciamo *sequenza* una funzione di dominio $\boldsymbol{Z}$ (insieme degli interi: 0, positivi e negativi). Precisamente: "$\{a_h\}$ è una successione e $\{b_k\}$ è una sequenza" sta a dire:

$$\forall h \in \boldsymbol{N} \;\; a_h = f(h); \quad \forall k \in \boldsymbol{Z} \;\; b_k = g(k). \qquad (1)$$

Essendo $\boldsymbol{Z} \supset \boldsymbol{N}$, ogni sequenza subordina una successione.

2) Una successione $\{a_h\}$ (una sequenza $\{b_k\}$) è definita *intensivamente* se la funzione $f(h)$ ($g(k)$) è valutabile immediatamente noto h (noto k). Tali ad esempio sono la "successione

armonica" – per la quale è $f(h) = 1 / (h+1)$ – e la sequenza dei cubi degli interi – per la quale è $g(k) = k^3 = (k \cdot k) \cdot k$.

3.1) Una successione $\{a_h\}$ è definita *ricorrentemente* se: a) è noto il termine iniziale a_0; b) è nota la legge con la quale da un termine qualsiasi si passa al successivo.

3.2) Una sequenza $\{a_k\}$ è definita *ricorrentemente* se: a) è noto un termine b_k (per certo k, non importa quale); b) è nota la legge con la quale da ogni termine si passa al successivo o al precedente (indifferentemente).

Tacitamente ci siamo limitati a leggi di ricorrenza del primo ordine. Più in generale, una legge può essere di ordine $m > 0$; allora occorre conoscere m termini consecutivi: i primi m per le successioni, da certo k a $k+m$-1 per le sequenze.

Di rilievo è il caso in cui la legge di ricorrenza è una legge di composizione binaria (del dato termine con una costante o con una funzione dell'indice), come la somma o il prodotto. Rientrano in questo caso: le progressioni aritmetiche e geometriche, i prodotti di fattori uguali (potenze di certa base), le somme di addendi uguali (multipli di una costante) e la successione dei fattoriali. Precisamente:

- Progressioni aritmetiche $\{a_k\}$. *Date le costanti* $m \in \boldsymbol{Z}$, A *e* d:

$$a_m = A; \;\; \forall k \in \boldsymbol{Z} \;\; (a_{k+1} = a_k + d \Leftrightarrow a_k = a_{k+1} - d).$$

- Progress. geometriche $\{g_k\}$. *Date le costanti* $m \in \boldsymbol{Z}$, G *e* $q \neq 0$:

$$g_m = G; \;\; \forall k \in \boldsymbol{Z} \;\; (g_{k+1} = g_k \cdot q \Leftrightarrow g_k = g_{k+1} / q).$$

- Prodotti di fattori uguali (potenze) $\{p_n\}$. *Dato* a *costante:*

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \;\; p_n = a^n \Leftrightarrow (p_0 = 1 \wedge \forall h \in \boldsymbol{N} \;\; p_{h+1} = p_h \cdot a). \qquad (2)$$

- Somme di addendi uguali (multipli) $\{s_n\}$. *Dato* a *costante:*

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \;\; s_n = na \Leftrightarrow (s_0 = 0 \wedge \forall h \in \boldsymbol{N} \;\; s_{h+1} = s_h + a). \qquad (3)$$

- Successione dei fattoriali $\{f_n\}$.

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \; f_n = n! \Leftrightarrow [f_0 = 1 \wedge \forall h \in \boldsymbol{N} \;\; f_{h+1} = f_h \cdot (h+1)]. \qquad (4)$$

Si noti l'isomorfismo tra potenze a^n e multipli na. In entrambi i casi n (esponente o coefficiente) è il *contatore* di operandi uguali (fattori o addendi) e il primo termine è l'elemento neutro (1 per il prodotto, 0 per la somma). Non bisogna dimenticare che somma e prodotto sono operazioni binarie. Solo perché sono anche associative si indicano con numero arbitrario di operandi come se fossero di *arietà* arbitraria! La notazione infissa $a*b$ rappresenti un'operazione binaria associativa qualunque (commutativa o non) con operatore sinistro a, operando destro b ed elemento neutro (destro e sinistro) n. Usando per antonomasia il linguaggio del prodotto, la *potenza* di *base* a e *grado* $m > 1$ è di solito intesa come catena di m-1 operazioni che usa m volte a: almeno una volta per operatore, le altre per operando. Ad esempio, $a^3 = a*a*a = (a*a)*a$: operazione binaria iterata per 2 volte con l'impiego per 3 volte di a, una per operatore, due per operando. È possibile però pareggiare il numero di operazioni al numero di operandi uguali alla *base* iniziando con l'elemento neutro in posizione di operatore. Allora, ad esempio: $a^3 = n*a*a*a = [(n*a)*a]*a$. In particolare per la somma e per il prodotto avremo:

$3a = 0+a+a+a = [(0+a)+a]+a$; $a^3 = 1 \cdot a \cdot a \cdot a = [(1 \cdot a) \cdot a] \cdot a$.

Analogamente si dica per la somma di addendi diversi e per il prodotto di fattori diversi. Sia $\{a_n\}$ una arbitraria successione:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 0 + a_0 + a_1 + \ldots + a_n; \;\; \prod_{k=0}^{n} a_k = 1 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n. \qquad (5)$$

Il convenire di iniziare ad operare con l'elemento neutro non è un'inutile pedanteria! Infatti permette di conservare il significato (rispettivo) di *somma* e *prodotto* ai simboli nelle (5) anche nel caso $n = 0$. D'altronde è proprio così che funziona il calcolo automatico! Ad esempio, la variabile che varrà la somma (il prodotto) d'un certo numero di addendi (di fattori) dovrà essere preventivamente *inizializzata* a 0 (ad 1).

Confido d'aver indotto il lettore a pensare a^3 come $1 \cdot a \cdot a \cdot a$ (anziché $a \cdot a \cdot a$) per qualunque valore di a (anche nullo); e $3!$ come $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ (anziché $1 \cdot 2 \cdot 3$). In ogni analogo composto $c(n)$, si regredisce a $c(n$-1) cassando la composizione con l'ultimo operando. Ora sì "*è naturale richiedere*": $a^0=1$; $0^0=1$; $0!=1$; $0a=0$.

Determinazione analitica del verso di rotazione di un fascio proprio di rette

di Gianpaolo Zontini [*]

Abstract

Aim of the present article is to justify the rule that, according to the coefficients of two straigth lines “generatrix” of a sheaf of straight lines, establishes the sheaf 's rotation versus.

È risaputo che in un fascio proprio di rette vi sono due versi di percorrenza e che il verso di rotazione positivo è scelto convenzionalmente come quello antiorario. In alcuni casi, ad esempio nella determinazione del numero delle soluzioni di un problema geometrico equivalente ad un sistema parametrico misto contenente un fascio di rette proprio, è utile stabilire analiticamente in quale verso di rotazione la retta generica percorre il fascio. La regola, che solitamente viene utilizzata per stabilire il verso di rotazione del fascio, afferma che se il determinante del 2° ordine formato con i coefficienti delle rette generatrici del fascio è positivo, anche il verso del fascio è positivo, mentre se il suddetto determinante è negativo anche il verso del fascio risulta essere tale.

L'equazione di un fascio di rette avente le rette generatrici r ed s di equazioni r: $ax+by+c=0$ e s: $a'x+b'y+c'=0$ si scrive

$$\lambda(ax+by+c) + \mu(a'x+b'y+c') = 0 \qquad (1)$$

dove λ e μ sono due parametri reali, oppure

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c') = 0 \qquad (2)$$

con parametro reale $k = \mu / \lambda$, $\lambda \neq 0$, dove risulta evidente che per ogni valore reale di k si ottiene una retta del fascio, tranne la retta s: $a'x+b'y+c'=0$, detta retta esclusa o retta non rappresentata, che corrisponde al valore nullo per λ in (1), ossia ad un valore infinito per k in (2). Equivalentemente l'equazione del fascio può anche essere data nella forma

$$(a+ka')x + (b+kb')y + c + kc' = 0 \qquad (3)$$

nella quale sono messi in evidenza i coefficienti della generica retta del fascio; ora nella rotazione viene modificato l'angolo α formato della retta generica del fascio con l'asse delle ascisse e quindi cambia il valore del coefficiente angolare $m = tg(a)$. La generica retta del fascio (3) ha un coefficiente angolare per il quale vale l'espressione $m = -(a+ka')/(b+kb')$ che risulta, ovviamente, funzione di k. Per studiare la variazione di m al variare di k è sufficiente calcolare la derivata prima di m rispetto a k, ottenendo

$$\frac{dm}{dk} = -\frac{a'(b+kb') - (a+ka')b'}{(b+kb')^2} = -\frac{a'b + ka'b' - ab' - ka'b'}{(b+kb')^2} =$$

$$= \frac{ab' - a'b}{(b+kb')^2} = \frac{\Delta}{(b+kb')^2}$$

dove con

$$\Delta = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

si è indicato, come di consueto, il determinate del sistema formato con le rette generatrici del fascio. Detto determinante risulta sicuramente diverso da zero essendo, per ipotesi, di tipo proprio il fascio di rette in esame. Ne consegue che il segno di dm/dk è dato dal segno del determinante Δ. In particolare, quando il Δ è positivo, anche dm/dk risulta essere tale e così m è funzione crescente di k, mentre quando il Δ è negativo, anche dm/dk è tale e la funzione m è decrescente.

Note: [1] È da notare che m è una funzione omografica, mentre per $b' = 0$ o $a = b = 0$ diventa una retta. [2] Se si scambia il ruolo delle rette generatrici, cambia anche il verso di rotazione del fascio. [3] Nel formare il determinante non si devono cambiare i segni dei coefficienti di una retta.

[*] *Socio Mathesis di Rovereto TN – ITIS G. Marconi di Rovereto*