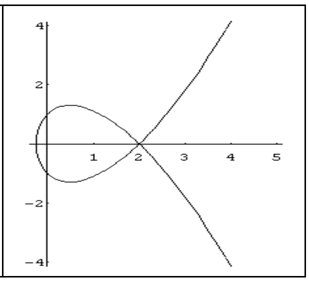
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 59 – novembre 2002



Sull'antisimmetria di ≤ tra cardinalità

di Ruggero Ferro [1]

Il seguente risultato è essenziale per dimostrare l'antisimmetria della relazione d'ordine tra cardinalità.

Un insieme infinito Z, contenuto in un altro insieme X, è equinumeroso a questo se contiene un sottoinsieme equinumeroso a X

Per dimostrare questa affermazione si deve risolvere il seguente problema: dati un insieme X_0, una biiettività f da X_0 in un suo sottoinsieme X_1 e un insieme Z_0 contenuto in X_0 e contenente X_1, trovare una biiettività da X_0 su Z_0.
La situazione può essere rappresentata come nella figura 1.

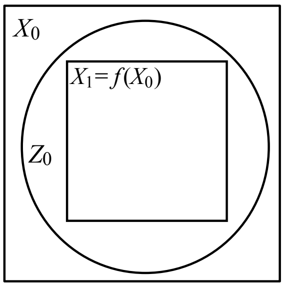


fig. 1

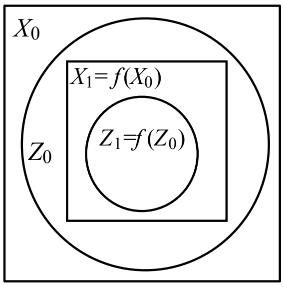


fig.2

La biiettività cercata per risolvere il problema, in particolare, dovrà far corrispondere a ciascuno degli elementi di $X_0 - Z_0$ un elemento in Z_0, e lo strumento di cui si dispone per determinare un corrispondente è la biiettività f da X_0 su X_1. La funzione $f_0 = f_{|X0-Z0}$ (f ristretta all'insieme X_0–Z_0, che è ciò che ora ci interessa) manda tutti gli elementi di $X_0 - Z_0$ su $f(X_0 - Z_0)$ = (essendo f iniettiva) $f(X_0) - f(Z_0)$.

Indicando con X_1 l'insieme $f(X_0)$ e con Z_1 l'insieme $f(Z_0)$, la funzione f_0 è una biiettività da $X_0 - Z_0$ su $X_1 - Z_1$. Ma ciascun elemento di $Z_0 - X_1$ non è corrispondente di alcunché mediante la funzione f, pur dovendo essere nel codominio della biiettività cercata. L'idea è di far corrispondere, nella biiettività che si sta cercando, questi elementi a sé stessi, cioè applicare a essi la funzione identica ristretta proprio all'insieme Z_0–$f(X_0)$=Z_0–X_1; si indichi questa funzione con $id_{|Z0-X1}$. Unendo la f_0 con la funzione $id_{|Z0-X1}$, si ottiene una biiettività, la si chiami g_0, da X_0–X_1 su $Z_0 - Z_1$. Pittorescamente si può dire di aver costruito una biiettività dagli elementi rappresentati dalla zona tra i due quadrilateri agli elementi rappresentati dalla zona tra i due tondi. La situazione ora potrebbe essere rappresentata come si vede nella figura 2.

Ora si considerino gli elementi di X_1–Z_1=$f(X_0) - f(Z_0)$. Questi appartengono sia a X_1=$f(X_0)$, sottoinsieme di X_0 per i cui elementi non si è ancora deciso a quali farli corrispondere, ma anche all'immagine, tramite g_0, di $X_0 - Z_0$. Così, se g_0 deve essere un primo pezzo della biiettività che vuol risolvere il problema proposto, affinché questa sia iniettiva bisogna far corrispondere agli elementi di $X_1 - Z_1 = f(X_0) - f(Z_0)$ degli elementi non ancora considerati. Ancora lo strumento a disposizione per far ciò può essere la funzione f: così si decide, nella ricerca della biiettività, di far corrispondere a ciascun elemento t appartenente a X_1–Z_1 = $f(X_0)$–$f(Z_0)$ l'elemento $f(t)$ che apparterrà a $f(X_1 - Z_1) = f(f(X_0) - f(Z_0))$ [si veda la fig. 3].

Si è definita così una biiettività da X_1–Z_1=$f(X_0)$–$f(Z_0)$ (gli elementi tra un quadrilatero e il tondo più grande in esso contenuto) su $f(X_1 - Z_1) = f(f(X_0) - f(Z_0))$=$f(X_1) - f(Z_1)$ che non è altro che la restrizione di f a $X_1 - Z_1$. Si chiami X_2 l'insieme $f(X_1)$, Z_2 l'insieme $f(Z_1)$, e $f_1 = f_{|X1-Z1}$ questa biiezione che risulta essere da X_1–Z_1 su X_2–Z_2. Analogamente a quanto fatto precedentemente, si sono ora saltati gli elementi di Z_1–$f(X_1)$= $f(Z_0)$–$f(f(X_0))$, cioè di $f(Z_0 - X_1)$, (gli elementi tra un tondo e il quadrilatero più grande in esso contenuto), e ancora si decide di far corrispondere a questi elementi essi stessi. Così la funzione identica ristretta a $f(Z_0$–$X_1)$ è una biiettività da questo insieme su sé stesso.

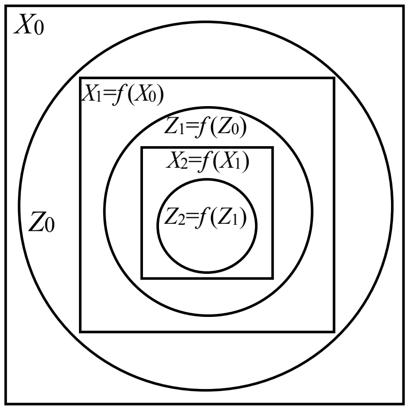


fig. 3

Si può ora definire la funzione g_1 come l'unione delle funzioni f_1 e $id_{|f(Z0-X1)}$. g_1 è una biiettività da X_1–X_2 su Z_1–Z_2. Questa è ancora una biiettività dalla zona racchiusa tra i due quadrilateri più interni sulla zona racchiusa tra i due tondi più interni.

A questo punto sembra chiaro come proseguire in modo analogo. Dopo i passi si sarà giunti a definire l'insieme X_i (ottenuto applicando i volte la funzione f a X_0), l'insieme Z_i (ottenuto applicando i volte la funzione f a Z_0) e gli X_{i+1} e Z_{i+1} (ottenuti analogamente) tali che $X_i \subseteq Z_i \subseteq X_{i+1} \subseteq Z_{i+1}$. Si saranno anche definite le biiettività f_i da X_i–Z_i su X_{i+1}–Z_{i+1} e g_i da X_i–X_{i+1} su Z_i–Z_{i+1}, la prima come restrizione della f all'insieme X_i–Z_i, l'altra unendo f_i alla funzione identica ristretta a Z_i–X_{i+1}. Ancora si potrà dire, pittorescamente, che la f_i è una biiettività dalla zona tra un quadrilatero e il tondo più grande in esso contenuto sulla zona compresa tra il prossimo quadrilatero e tondo inclusi nei primi, e anche che g_i è una biiettività dalla zona tra due quadrilateri consecutivi sulla zona tra i due massimi tondi consecutivi contenuti nei precedenti quadrilateri rispettivamente.

Ora, si possono considerare gli insiemi
$A=\cup\{X_i\text{-}Z_i: i\in \boldsymbol{N}\}$, $B=\cup\{Z_i\text{-}X_{i+1}: i\in \boldsymbol{N}\}$ e $C=\cup\{X_i\text{-}X_{i+1}: i\in \boldsymbol{N}\}$.
A è l'unione degli insiemi a cui si è deciso di applicare la f nel cercare la biiettività, B è l'unione degli insiemi a cui si è deciso di applicare la funzione identica, e C è l'unione degli insiemi a cui si è deciso di applicare le biiettività g_i. Si osservi anche che C=$A\cup B$. Si chiami h la funzione $\cup g_i$. Essa è una biiettività da C su C-$(X_0$-$Z_0)$ poiché è una unione di biiettività i cui domini sono a due a due disgiunti e i cui codomini sono a due a due disgiunti e inoltre l'unione dei loro domini è proprio C mentre l'unione dei loro codomini è
$\cup\{g_i(X_i–X_{i+1}): i\in \boldsymbol{N}\} = \cup\{X_{i+1}–X_{i+2}): i\in \boldsymbol{N}\} = C–(X_0–Z_0)$.
Se C=X_0, allora h è la biiettività cercata da X_0 su Z_0. Se invece C è contenuto in X_0 ma è diverso da X_0, allora gli elementi di

$X_0–C$, insieme che si può indicare con D, non sono né nel dominio C, né nel codominio $C–(X_0–Z_0)$ di h [poiché $D∩C = (X_0–C)∩C=∅$ e $D∩(C–(X_0–Z_0)) = (X_0–C)∩(C–(X_0–Z_0))= ∅$]. Così per completare la biiettività cercata a partire dalla funzione h basta aggiungerle una funzione biiettiva da C a C: ad esempio, l'identità su C. Gli elementi di $D=X_0–C$ possono essere rappresentati da quelli nella zona delimitata da un triangolo nella figura 4.

Sia h' la funzione unione delle funzione h e della funzione $id_{|X0\text{-}C}$ (la funzione identica ristretta a $X_0–C$). In questo caso h' è la biiettività cercata da X_0 su Z_0. La soluzione trovata del problema proposto permette di completare la dimostrazione che la relazione di ≤ tra cardinalità è antisimmetrica; sicché tale relazione (che si sa già essere una relazione riflessiva e transitiva) è una relazione d'ordine non stretto.

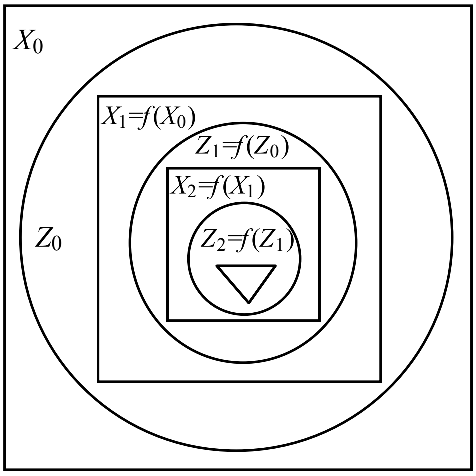


fig. 4

Ma anche se la relazione di ≤ tra cardinalità è una relazione d'ordine, resta il dubbio se dati due qualsiasi insiemi si possa dire che la cardinalità di uno è minore od uguale alla cardinalità dell'altro; cioè se la relazione d'ordine introdotta è totale. La risposta a tale dubbio viene rinviata ad altro momento perché è legata all'assioma della scelta, nel senso che si dimostra (attraverso l'equivalente principio del buon ordinamento) che questo assioma è equivalente all'affermazione che dati due qualsiasi insiemi, sicuramente la cardinalità di uno è minore o uguale alla cardinalità dell'altro.

[1] Docente di Logica Matematica, Facoltà di Scienze. MM. FF. NN. – Corso di Informatica - Università degli Studi di Verona

Un teorema di incompletezza

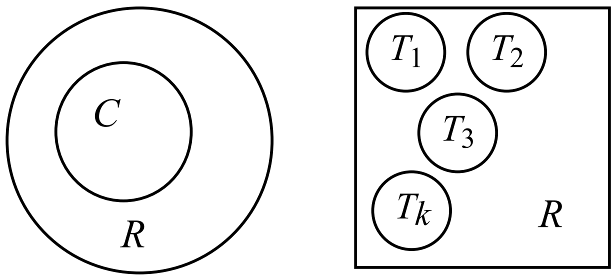
di Vincenzo Zamboni

[*Segue dal n. 57*] C'è anche una questione di principio. Se osserviamo un sistema isolato, esso, quantomeno, sarebbe in interazione con l'osservatore, come insegna la meccanica quantistica. E noi siamo in interazione con altre cose, che sono in interazione con altre… da capo, come prima. In molte teorie parziali, utili a vari scopi, queste interazioni, a volte possono essere trascurate. Ma una teoria unitaria, per definizione, non potrebbe trascurarle: ci sono. Dato che noi siamo in interazione con l'universo, qualunque "osservato" è, per definizione, in interazione con noi; ciò lo rende parte della catena delle interazioni, che collega tutte le "cose" e tutti i "fenomeni" tra di loro nello spazio e nel tempo. In ciò consiste l'unitarietà della realtà: non c'è nulla che non sia correlato, in qualche modo, con tutto il resto.

La meccanica quantistica ci ha insegnato l'interazione tra osservatore e osservato. Ci ha anche insegnato che in certe circostanze possiamo trascurare tale interazione. Trascurare significa solo che la sua intensità può essere piccola rispetto alle altre grandezze esaminate. Piccolo non significa non esistente. Proprio insistendo, potremmo ipotizzare cose o fenomeni che non interagiscono assolutamente mai con noi, però queste apparterrebbero alla categoria di ciò di cui non possiamo assolutamente dire nulla: nemmeno se esistano oppure no, o che significato dovrebbe avere la loro eventuale esistenza. Siamo costretti a ritornare sempre al concetto di realtà, o esistente, come insieme di parti tutte collegate tra di loro. Sicché la stessa suddivisione in parti appare essere solo un nostro modo di pensare e descrivere. Pare, anzi, che mentre la realtà è estremamente unitaria, la nostra abilità nel descriverla si basi sulla capacità intellettuale di creare separazioni. Con un metodo separiamo le cose e con lo stesso metodo pretendiamo di riunirle. Ma il metodo di riunire non può essere lo stesso di quello di dividere. Attualmente, l'unica teoria unitaria accettabile potrebbe essere quella che, con buonumore, potremmo scrivere così:{ }; cioè il nulla.

Ma i fisici aspirano a una teoria unitaria fatta di equazioni algebriche, trigonometriche, differenziali e integrali; cioè basata su strumenti classici che vanno bene per la costruzione delle teorie parziali, ma che sono inadeguati a descrivere una teoria unitaria.

Stephen Hawking, in un suo scritto, ha sottolineato la gravità della perdurante mancanza in fisica di una teoria unitaria. [B.6] e ha descritto le conoscenze della fisica teorica come una struttura a bolle. Ho riflettuto su questa descrizione e ne ho dedotto che il vero problema è ammettere che questo stato di cose sia inevitabile, come ora discuterò, utilizzando semplici concetti della teoria degli insiemi. Con R indico la realtà, cioè l'insieme di tutti i fenomeni. Con T_k la k-esima teoria parziale e con C la conoscenza. Anche le operazioni di conoscenza, incluse nelle teorie fisiche, sono dei fenomeni. Possiamo perciò rappresentare ciò con un diagramma:



Dunque, le operazioni di conoscenza, incluse le teorie che organizzano tali operazioni, sono un sottoinsieme proprio dell'insieme globale dei fenomeni. Un sottoinsieme proprio non può formare un ricoprimento dell'insieme globale R. Geometricamente, possiamo immaginare che le bolle T_k o la bolla C si estendano progressivamente, fino a riempire (o a coprire tutto l'insieme R. Tuttavia, non dobbiamo dimenticare che cosa queste bolle rappresentino: la conoscenza, cioè un sottoinsieme, per definizione, della realtà. Se immaginiamo che C giunga a coincidere con R dobbiamo fare attenzione al cambiamento della sua natura: non è più sottoinsieme, non è più conoscenza perché non vi è più conosciuto (infatti non vi è più altro che sia distinto da C e sia dunque l'oggetto della conoscenza), non vi è più differenziazione, vi è solo identificazione tra conoscente e conosciuto. Finché usiamo i simboli (parole, equazioni, teorie matematiche) siamo vincolati ai loro limiti, alla riduzione di realtà, alla produzione di C come sottoinsieme di R. Un buon esempio, invece, di identificazione *yogica* tra C e R è stato fornito da Ramakrishna [B. 15]. Ogni volta che abbiamo simbolo e simboleggiato, significante e significato, abbiamo una frammentazione della realtà. Il concetto di teoria unitaria distrugge il simbolo, che non può più essere distinto dal simboleggiato, e la teoria non riesce a ricoprire la realtà mantenendo la propria identità di teoria: è possibile solo la funzione indifferenziata. Le teorie fisiche sono così vaste e interessanti da creare, a volte, l'impressione di poter servire a tutto. Ad una accurata analisi, assomigliano, invece, a raffinatissimi cacciaviti intellettuali che, impiegati per scopi a loro estranei, non funzionano più. [*Segue al numero 60*]