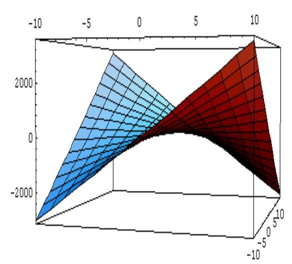
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS - Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche - Fondata nel 1895 - Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 - 03 - 1999 - I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b - 37126 Verona - tel e fax (045) 8344785 - 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it - Stampa in proprio - Numero 60 – dicembre 2002



La convoluzione e il suo significato probabilistico

di Luciano Corso [1] e Alberto Guerrini [2]

Siano date due variabili aleatorie (in seguito userò l'abbreviazione v.a.) X e Y rispettivamente con distribuzione di probabilità $F_1(x)=P(X \leq x)$ e $F_2(y)=P(Y \leq y)$. La distribuzione di probabilità congiunta delle due v.a. è data da: $F(x, y)=P(X \leq x,\ Y \leq y)$. Se le X e Y sono statisticamente indipendenti, allora $F(x, y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$ per le distribuzioni di probabilità e $f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ per le densità di probabilità.

In molte applicazioni interessa conoscere il comportamento di tale distribuzione congiunta. In particolare, nella teoria dei campioni, lo studio delle distribuzioni congiunte è indispensabile per valutare le probabilità associate ai diversi valori che può assumere una certa v.a. composta da v.a. campionarie con distribuzione di probabilità nota. Date due v.a. X e Y con note distribuzioni di probabilità e scelta una loro composizione $g(x, y)$ (per esempio: $W=X+Y$, $W=X\cdot Y$, $W=X / Y$, $W=X^{Y}$), è possibile trovare la distribuzione di probabilità della v. a. $W = g(x, y)$? In generale, il problema è assai complesso e non sempre ammette soluzione; in alcuni importanti casi molto frequenti in statistica, però, esistono regole generali che consentono di rispondere affermativamente al quesito.

Consideriamo la seguente v.a. composta $W=X+Y$. Essa assumerà dei valori in corrispondenza ai valori assunti dalle v. a. X e Y, con distribuzione di probabilità $F_1(x)$ e $F_2(y)$. Le probabilità assegnate ai valori $W=w$, dipenderanno dalle probabilità assegnate ai valori $X=x$ e $Y=y$. Se X e Y sono statisticamente indipendenti, allora $f(w)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, per quanto visto sopra. Ci interessa trovare una espressione semplice di $f(w)$.

Siano $A_X(z)$ e $B_Y(z)$ le funzioni generatrici delle due v. a. X, Y:

$$A_X(z) = a_0+a_1z+a_2z^2+ \dots +a_kz^k+ \dots \qquad (1)$$

$$B_Y(z) = b_0+b_1z+b_2z^2+ \dots +b_jz^j+ \dots \qquad (2)$$

ove z è una variabile ausiliaria, non necessariamente con qualche significato, e (1), (2) sono scritture che rappresentano puri sviluppi formali di $A_X(z)$ e $B_Y(z)$. Il loro prodotto è:

$$C_W(z) = A_X(z)\cdot B_Y(z) = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)\cdot z + \dots + (a_0b_n+ \dots a_nb_0)z^n + \dots \qquad (3)$$

Il termine generale dei coefficienti assegnati a z^n è dato da:

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \quad , \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad (4)$$

dove $h_n = P(W=w_n)$, $a_k = P(X=x_k)$ e $b_{j=n-k} = P(Y=y_j)$ e viene detto convoluzione delle probabilità a_k e $b_{(j\ =\ n-k)}$. Si consideri, per quanto detto, il ruolo degli indici k, j, n, in (1), (2), (3), (4) e (5). Essi, nel discreto, identificano i valori di $X=x_k$, $Y=y_j$ e $W=w_n$ che devono essere equispaziati e con il medesimo passo. Da ciò risulta che $C_W(z)$ è uguale a:

$$C_W(z) = \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right]\cdot z^n \qquad (5)$$

Qualora le $F_1(x)$, $F_2(y)$ e $F(w)$ fossero distribuzioni di probabilità relative a v. a. continue le (4) e (5) subirebbero le corrispondenti variazioni che presentiamo di seguito:

$$h(w) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} a(x)\cdot b(w-x)\cdot dx \qquad (6)$$

$$C_W(z) = \int_{w=-\infty}^{\infty}\left[\int_{x=-\infty}^{+\infty} a(x)\cdot b(w-x)\cdot dx\right]\cdot z^w \cdot dw \qquad (7)$$

In (7), posto $z = e^{-i\cdot\pi}$ si ottiene la trasformata di Fourier di $h(w)$. Quindi, $C_W(z)$ – funzione generatrice della v.a. W – è la trasformata di Fourier del prodotto convolutorio delle due densità di probabilità $a(x)$ e $b(y)$:

$$C_W\left(z = e^{-i\cdot\pi}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(w)\cdot e^{-i\cdot\pi\cdot w}\cdot dw . \qquad (8)$$

Per come sono state costruite le (4), (5), (6) e (7) $a(.)$ e $b(.)$ sono scambiabili (in particolare, la convoluzione è associativa e commutativa). Le (4) e (6) in calcolo delle probabilità hanno una notevole importanza. Infatti, esse rappresentano rispettivamente, le funzioni di densità di probabilità discrete (masse di probabilità) e continue relative alla v.a. $W=X+Y$ e quindi alla distribuzione di probabilità congiunta $F(w)$ quando X e Y siano statisticamente indipendenti e dotate di densità di probabilità. Per quanto esposto, date due v. a. X e Y dotate di densità di probabilità $f_1(x)$ e $f_2(y)$ e statisticamente indipendenti, e W la loro somma, la densità di probabilità congiunta associata a W è proprio la convoluzione integrale $h(w)$ (o h_n, nel discreto). Poiché la maggioranza delle v.a. campionarie, in statistica, vengono composte mediante somme $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\,r} + x_2^{\,r} + \dots + x_n^{\,r}$, $\forall\, r\in N$, si capisce l'importanza della convoluzione.

Nella pubblicistica, il simbolo con cui si indica una funzione generatrice $A_X(z)$ è anche $\langle X, z\rangle$, che rappresenta la successione ordinata dei coefficienti delle potenze di z, della variabile X: $\langle X, z\rangle = \langle a_0 , a_1 , \dots, a_k, \dots\rangle$; mentre per la convoluzione si usa "$*$" posto tra le due funzioni che entrano in convoluzione. Perciò la (3) viene scritta

$\langle W, z\rangle = \langle X, z\rangle\cdot\langle Y, z\rangle = \langle a_0b_0 , a_0b_1+a_1b_0 , \dots , a_nb_0 + \dots + a_0b_n , \dots\rangle$

mentre la (4) e la (6) vengono scritte così: $h_W = a_X * b_Y$; $h(W) = a(X) * b(Y)$.

Consideriamo alcuni esempi:

Determiniamo la convoluzione di due densità di probabilità discrete di due v.a. binomiali $X \sim Bin(n,p)$ e $Y \sim Bin(m,p)$; dove $W = X+Y$:

$$h_w = \sum_{k=0}^{w} a_k \cdot b_{w-k} = \sum_{x=0}^{w}\binom{n}{x}\cdot a^x \cdot b^{n-x}\cdot\binom{m}{w-x}\cdot a^{w-x}\cdot b^{m-w+x} = \binom{m+n}{w}\cdot a^w \cdot b^{m+n-w} .$$

Ove gli indici k, j, n in (1), (2), (3), (4), in questo caso, corrispondono ai valori assunti da x, y e w e quindi sono stati omessi.

Determiniamo la convoluzione di due densità di probabilità discrete di due v.a. di Poisson $X \sim Pois(\lambda_1)$ e $Y \sim Pois(\lambda_2)$; dove $W = X+Y$:

$$h_w = \sum_{k=0}^{w} a_k \cdot b_{w-k} = \sum_{x=0}^{w}\frac{e^{-\lambda_1}\cdot\lambda_1^x}{x!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\cdot\lambda_2^{w-x}}{(w-x)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{w!}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^w .$$

Anche qui gli indici k, j, n in (1), (2), (3), (4), corrispondono ai valori assunti da x, y e w e quindi sono stati omessi.

Determiniamo la convoluzione di due densità di probabilità di v. a. esponenziali.

Sia $W=X+Y$ e siano X e Y due v.a. con densità di probabilità esponenziale:

$$f_1(x)=\begin{cases}\lambda_1\cdot Exp[-\lambda_1\cdot x] & 0\le x<+\infty\\ 0 & altrove\end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}\lambda_2\cdot Exp[-\lambda_2\cdot y] & 0\le y<+\infty\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Si cerci la funzione di densità di probabilità $h(w)$. La $h(w)$ è continua per cui:

$$h(w)=\int_{x=0}^{w}\lambda_1\cdot Exp\left[-\lambda_1\cdot x\right]\cdot\lambda_2\cdot Exp\left[-\lambda_2\cdot(w-x)\right]\cdot dx$$

$$=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-\lambda_2\cdot w}\int_{x=0}^{w}Exp\left[-(\lambda_1-\lambda_2)\cdot x\right]\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right]\cdot\left(e^{-\lambda_2\cdot w}-e^{-\lambda_1\cdot w}\right)$$

Per cui possiamo scrivere che:

$$h(w)=\begin{cases}\left[\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right]\cdot\left(e^{-\lambda_2\cdot w}-e^{-\lambda_1\cdot w}\right) & 0\le w<+\infty\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Se le v.a. X e Y hanno densità di probabilità esponenziali con parametri λ_1 e λ_2 uguali, allora posto $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$ si ha:

$$h(w)=\int_{x=0}^{w}\alpha\cdot Exp[-\alpha\cdot x]\cdot\alpha\cdot Exp\left[-\alpha\cdot(w-x)\right]\cdot dx=$$

$$=\alpha^2\int_{x=0}^{w}Exp[-\alpha\cdot w]\cdot dx=\alpha^2\cdot w\cdot e^{-a\cdot w}.$$

Estendendo il ragionamento a n v. a. statisticamente indipendenti e ciascuna delle quali avente funzione di densità di probabilità di tipo esponenziale con parametro α costante per tutte, si ottiene: $W=X_1+X_2+\ldots+X_n$;

$$h(w)=\frac{\alpha^n}{(n-2)!}\cdot\int_{x=0}^{w}Exp[-\alpha\cdot w]\cdot dx=\frac{\alpha^n\cdot w^{n-1}\cdot e^{-a\cdot w}}{\Gamma(n)}$$

che, come è noto, è la funzione di densità di probabilità Gamma, importantissima in statistica inferente per le numerose applicazioni che se ne hanno nella stima della varianza della popolazione σ^2. Essa, formalmente, si presenta nel modo seguente:

$$h(w)=\begin{cases}\frac{\alpha^n\cdot w^{n-1}\cdot e^{-a\cdot w}}{\Gamma(n)} & 0\le w<+\infty\\ 0 & altrove\end{cases}$$

ove $\Gamma(n)=(n-1)!$.

Bibliografia: [B.1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, J. Wiley & Sons Inc., New York, 1968; Cerasoli, Eugeni, Protasi, *Elementi di Matematica discreta*, Editore Zanichelli, Bologna, 1992; [B.2] Graham, Knuth, Patashnik, *Matematica Discreta*, Hoepli, Milano, 1996; [B.3] Luciano Daboni, *Calcolo delle probabilità ed elementi di Statistica,* UTET, Torino, 1980. [B.4] G. Landenna, D. Marasini, P. Ferrari, *Probabilità e variabili casuali*, Il Mulino, Bologna, 1997; A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Trasformate di Laplace e calcolo simbolico*, UTET, Torino, 1971

[1] , [2] Docenti di Calcolo delle probabilità, statistica e R.O. - Corso di informatica - ITIS G. Marconi di Verona

Passato, presente e futuro
(per agglomerati massivi macroscopici)
e paradosso dei gemelli

di Francesco Gibertoni Barca [3]

La possibilità di viaggiare nel passato o nel futuro ha sempre sollecitato e solleticato la fantasia di molti scrittori e cineasti; una non infrequente cattiva interpretazione poi, delle scoperte relativistiche del secolo scorso, ha spesso ulteriormente illuso , anche le persone meno fantasiose, sulla ipotetica possibilità almeno teorica di viaggiare nel tempo, o meglio nello spazio-tempo. Dal punto di vista logico, ancor prima che fisico, dato l'enorme dispendio di energia necessaria allo scopo, è esclusa nel mondo macroscopico una possibilità del genere, ma non quantisticamente! Per intenderci: ormai si sa … nel mondo dell'infinitamente piccolo, possono sempre accadere delle "cose apparentemente strane o inspiegabili" almeno secondo i nostri criteri di indagine speculativa comune! A tal proposito nessuno ci vieta di pensare che il tempo, così come noi oggi sappiamo misurarlo, in modo anche molto preciso con orologi al cesio ad esempio, non sia affatto un *continuum* (in definitiva che non si possa avere una corrispondenza biunivoca tra un segmento temporale ed un segmento geometrico "denso"), per eventi della durata di una estrema brevità, cioè che anche il tempo stesso possa considerarsi quantizzabile; non dobbiamo scandalizzarci di ciò se pensiamo ad una definizione prettamente energetica di tempo.

[*Segue al numero* 64]

[3] *Docente di Elettronica e Tecnologie presso l'I.S.I.S.S. "Carlo Anti" di Villafranca VR, e-mail: gibertoni_barca@hotmail.com*

Un teorema di incompletezza

di Vincenzo Zamboni [4]

[*Segue dal numero 59*] Riprendiamo ora l'analisi della situazione dal punto di vista matematico. Bertrand Russel riteneva che la matematica non fosse in grado di garantire la propria veridicità e autoconsistenza e, più tardi, Gödel dimostrò che ciò era vero. Date queste premesse, oltre un certo limite, la matematica risulta inefficace. Secondo W. Sawyer, tutta quella matematica che i fisici e gli ingegneri usano per le loro indagini, anche avanzate, ruota intorno al concetto di funzione e all'uso delle funzioni stesse [B.7]. Per esempio gli operatori differenziali della fisica o di qualunque altra scienza sperimentale, acquistano significato quando siano applicati a opportune funzioni. La maggior parte delle funzioni o di quelle che sono esprimibili tramite serie, risulta collegabile alla funzione ipergeometrica, $F(a, b, c, x)$. Per esempio $log(1+x) = x\cdot F(1, 1, 2, -x)$ e $arctg(x)=xF(1/2,\ 1,\ 3/4,\ -x^2)$. «La quasi totalità delle funzioni studiate nelle facoltà universitarie - dice Sawyer - sono diramazioni di questa grande famiglia, al di fuori della quale esistono piccole zone di ricerca pionieristica, per la quale si fatica a trovare applicazione». Questo è solo un esempio attraverso il quale si vede che anche la matematica appare nei fatti strutturata a bolle: c'è la grande bolla della funzione ipergeometrica e alcune bolle minori, oltre le quali esistono zone che la matematica non riesce a trattare. Ci sono, dunque, ampie classi di problemi che la matematica riesce a trattare, e altri problemi per i quali le risorse della matematica sembrano inadeguate. Molti fisici si attendono strumenti matematici nuovi che li aiutino nella ricerca della unificazione.

Bibliografia: [1] Landau, Lifsits, *Meccanica quantistica*, ed. Riuniti – [2] George Gamow, *Biografia della fisica*, Mondadori, Milano – [3] Gregory Bateson, *Verso un'ecologia della mente*, ed. Adelphi – [4] Wilard V. O. Quine, *Manuale di logica*, Feltrinelli, Milano – [5] Edward De Bono, *Il pensiero laterale*, Rizzoli ed. – [6] Stephen HawKing, *Dal Big Bang ai buchi neri*, Rizzoli – [7] W. W. Sawyer, *Preludio alla matematica*, Mondadori – [8] Carlo Franzinetti, *Particelle*, Ed. Riuniti – [9] Bertrand Russel, *I problemi della filosofia*, Longanesi – [10] Bertrand Russel, *La conoscenza del mondo esterno*, Longanesi – [11] Ray Monk, *Russel*, ed. Sansoni- [12] Betrand Russel, *Introduzione alla filosofia matematica*, ed. Newton Compton – [13] Kolakowsky, *La ricerca della certezza*, Laterza – [14] Robert Gourian, *Particelle e acceleratori*, ed. Saggiatore – [15] Romain Rolland, *Vita di Ramakrishna*, ed. Mondadori – [16] Max Born, *Fisica Atomica*, ed. Bollati Boringhieri – [17] Maddalena Gallani, *Campo tachionico*, in Tecniche nuove

[4] Fisico di Verona

La redazione di MatematicaMente augura a tutti un felice 2003