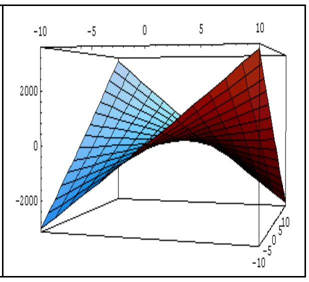
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS - Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche - Fondata nel 1895 - Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 - 03 - 1999 - I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b - 37126 Verona - tel e fax (045) 8344785 - 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it - Stampa in proprio - Numero 61 – dicembre 2002



Teoria della misura e integrale di Lebesgue

di Giulio Cesare Barozzi [*]

1. Se si apre un libro di matematica anteriore alla prima metà del secolo scorso ci si rende conto che è esistita anche per la nostra disciplina un'età dell'innocenza. È quella in cui ogni funzione è continua e derivabile, gli integrali dipendenti da un parametro sono tutti derivabili sotto il segno d'integrale, le serie sono tutte convergenti fino a quando non si dimostra che sono divergenti (vale una sorta di principio di presunzione di innocenza fino a dimostrazione della colpevolezza).
A partire dalla metà del secolo scorso si è stati costretti ad accorgersi che, oltre alla fisiologia matematica, esiste anche la patologia. Storicamente, uno dei problemi che hanno, per così dire, costretto i matematici ad occuparsi di funzioni non continue è stato quello dello sviluppo in serie di Fourier. Credo sia stata una sorta di choc la scoperta, a metà del secolo scorso, del fatto che sovrapponendo infinite sinusoidi, dunque grafici di funzioni infinitamente differenziabili, si potevano ottenere grafici di funzioni discontinue.

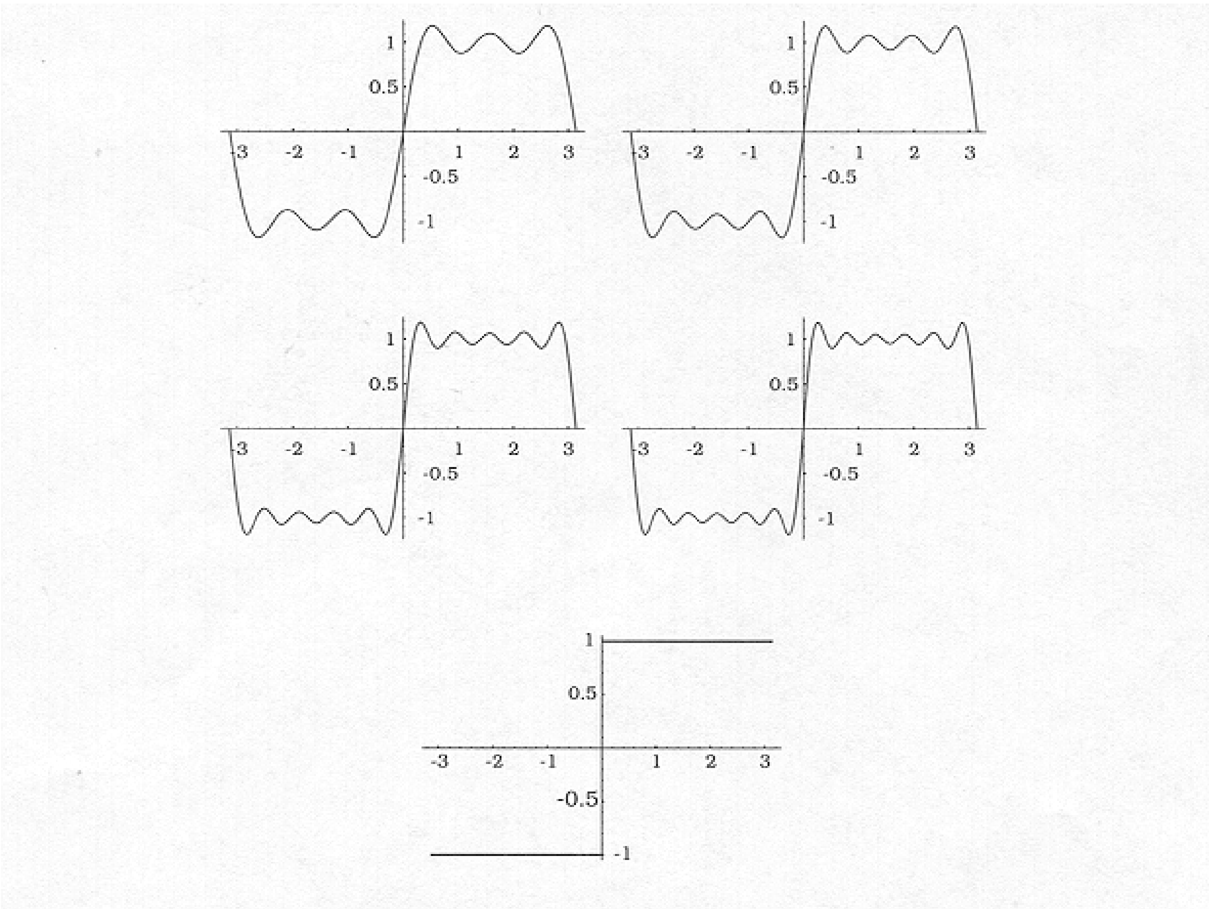


Figura 1. Alcuni termini dello sviluppo in serie di Fourier della funzione sign(x).

2. Una volta infrante le colonne d'Ercole della continuità, la tentazione di spingersi "di retro al sol" è stata molto forte. Uno dei personaggi di questa storia è certamente Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859). Appartenente ad una famiglia di origine vallona, culturalmente fu matematico tedesco: alla morte di C.F. Gauss (1855) gli succedette sulla cattedra presso l'università di Göttingen. Suo è l'esempio della funzione

$$f(x) := \begin{cases} 1, & se\ x \in Q \cap [0,1] \\ 0, & altrimenti. \end{cases}$$

L'insieme dei punti compresi tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione (insieme che viene variamente denominato: sottografico di f, oppure trapezoide di f o ancora insieme delle ordinate di f) è un "pettine per pidocchi": esso è il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(1, 0)$ a cui si aggiunge, per ogni punto di ascissa razionale, un segmento verticale di lunghezza unitaria. Il grafico di questa funzione non è in alcun modo disegnabile: essa è discontinua in ogni punto dell'intervallo $[0, 1]$ e come tale non è integrabile nel senso di Riemann.

L'idea dell'integrale di Riemann per $f : [a, b] \in \boldsymbol{R}$ è quella di dividere in sottointervalli l'intervallo di definizione e di prendere il valore che la funzione integranda assume in uno dei punti di ciascun sottointervallo come rappresentante dei valori che la funzione assume su tutto il sottointervallo stesso. Ecco dunque le somme di Riemann:

$$\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_{k-1}-x_k),$$

dove $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. In altre parole: si parte dall'idea che a punti vicini sull'asse delle ascisse corrispondano valori non troppo distanti tra loro sull'asse delle ordinate. Questo non significa che la continuità della funzione sia necessaria per l'integrabilità (anche se è senz'altro sufficiente), ma significa che la funzione non può essere "troppo discontinua", dove il senso esatto di questa locuzione non si era in grado di chiarire nel secolo passato.

Possiamo divertirci a costruire un po' alla volta la funzione di Dirichlet ragionando in questo modo: organizziamo in successione i numeri razionali dell'intervallo $[0, 1]$, siano essi

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Un modo potrebbe essere quello di rappresentare i numeri razionali compresi tra 0 a 1 mediante frazioni ridotte ai minimi termini, e poi ordinare tali frazioni secondo un criterio lessicografico, esaminando prima i denominatori e poi i numeratori: si otterrebbe allora la successione

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \ldots$$

Sia $f_n(x)$ la funzione che vale 1 se $x = x_k$, con $k = 1, 2, 1 \ldots n$, vale 0 altrimenti. In termini più intuitivi: a partire dalla funzione identicamente nulla, solleviamo uno dopo l'altro i punti di ascissa razionale portandoli alla quota 1.

Evidentemente, ciascuna delle funzioni f_n presenta un numero finito di punti di discontinuità (ne presenta precisamente n) e, al di fuori dai tali punti, è nulla. Si ha dunque

$$\forall n, \qquad \int_0^1 f_n(x)\cdot dx = 0.$$

Inoltre la successione (f_n) è monotona crescente (in senso lato) e converge puntualmente alla funzione di Dirichlet $f(x)$. Ad onta del fatto che tale funzione sia limite puntuale di una successione monotona di funzioni integrabili, essa non è integrabile: comunque si scomponga l'intervallo base $[0, 1]$, a causa della densità dei numeri razionali si ha che ogni somma inferiore vale 0 e ogni somma superiore vale 1.

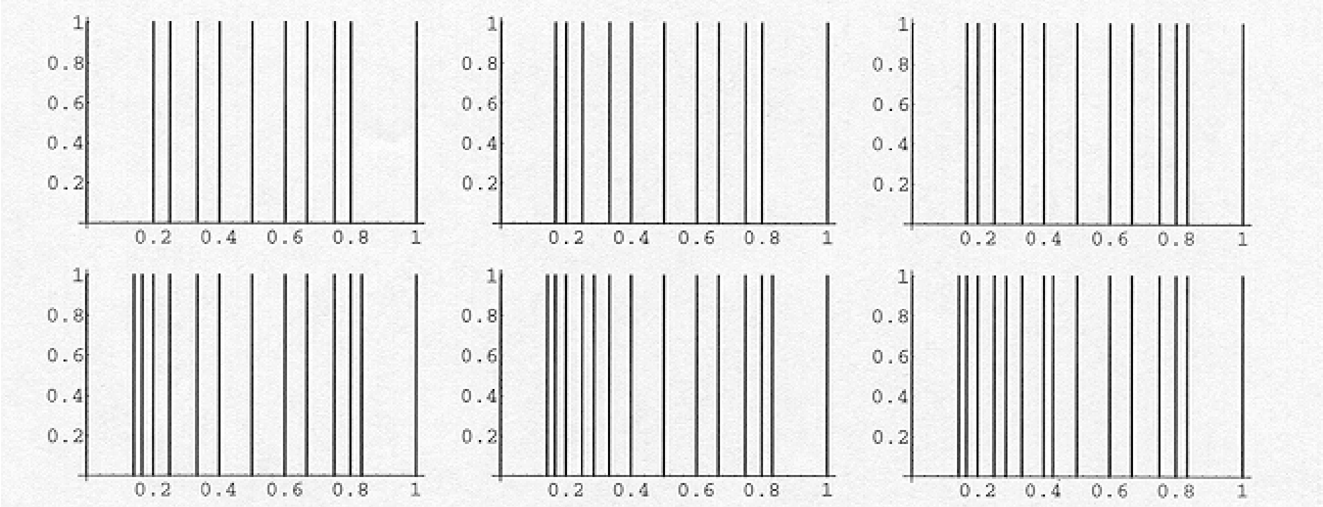


Figura 2. Da sinistra a destra, dall'alto al basso: la funzione di Dirichlet come limite di una successione crescente di funzioni nulle tranne in un numero finito di punti dell'intervallo$[0, 1]$ (vengono mostrati i relativi sottografici).

3. Strettamente imparentato con l'esempio precedente è quello che si ottiene ritoccando la definizione nel seguente modo:

$$g(x) := \begin{cases} 1/q, & se\ x = p/q \in [0,1] \\ 0, & altrimenti. \end{cases}$$

È sottinteso che $x = p/q$ è la rappresentazione del numero razionale x mediante una frazione ridotta ai minimi termini con denominatore positivo.

Anche questa volta possiamo pensare che la funzione g sia generata dalla funzione identicamente nulla alzando uno dopo l'altro i punti di ascissa razionale, ma questa volta l'innalzamento è inversamente proporzionale al denominatore della frazione che rappresenta il numero stesso (dunque quanto più grande è tale denominatore, tanto più piccolo è l'innalzamento). (Si veda la fig. 3)

È del tutto controintuitivo il fatto che, per ogni punto x_0 dell'intervallo $[0, 1]$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \tag{1}$$

dunque g è continua in tutti i punti irrazionali e discontinua nei razionali (0 escluso). Per provare la relazione di limite appena scritta, osserviamo che, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si ha la relazione $g(x) \ge \varepsilon$ solo se x è razionale del tipo $x = p/q$ con

$$\frac{1}{q} \ge \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad q \le \frac{1}{\varepsilon} \quad . \tag{2}$$

Dunque, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, i punti dell'intervallo $[0, 1]$ per i quali sussiste la relazione (2) sono in numero finito. Ne viene che, scelto comunque un $x_0 \in [0, 1]$, sia esso razionale che irrazionale, è certamente possibile trovare un intorno "forato" di esso di raggio abbastanza piccolo, sia l'insieme degli x per cui si ha

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

in modo tale da escludere tutti i punti per cui vale la (2). Dunque per tutti i punti di tale intorno vale la relazione opposta alla (2), cioè

$g(x) < \varepsilon$

e questo equivale manifestamente alla relazione di limite (1), in quanto g è non negativa.

La funzione g ammette un insieme di punti di discontinuità che è di misura nulla (in un senso che chiariremo tra breve): essa è integrabile secondo Riemann con integrale uguale a 0.

[*Segue al n. 62*]

[*] *Docente di Analisi Matematica - Università degli Studi di Bologna*