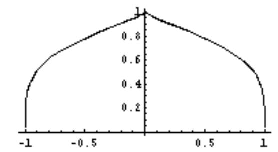
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS - Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche - Fondata nel 1895 - Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 - 03 - 1999 - I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 62 – gennaio 2003



Teoria della misura e integrale di Lebesgue

di Giulio Cesare Barozzi [*]

[2ª parte. *Segue dal numero* 61]

Nella figura 4 mostriamo alcune delle funzioni costanti a tratti maggioranti la funzione g, ottenute scomponendo l'intervallo base in 2^n intervalli di uguale lunghezza. La funzione maggiorante G è posta uguale a g nei punti della scomposizione e, se $[x_{k-1}, x_k]$ è un generico intervallo della stessa scomposizione, abbiamo posto

$$G(x) := sup\ \{g(x) \mid x_{k-1} < x < x_k\}$$

per $x_{k-1} < x < x_k$. A parole: in ciascuno degli intervalli aperti determinati dalla scomposizione, G è posta uguale all'estremo superiore (di fatto al massimo) tra i valori assunti da g nello stesso intervallo. Sopra ciascuna figura è stampato il valore dell'integrale della funzione maggiorante rappresentata; come si vede i valori di tali integrali (altro non sono che somme superiori della funzione g) vanno decrescendo mano a mano che la scomposizione viene raffinata.

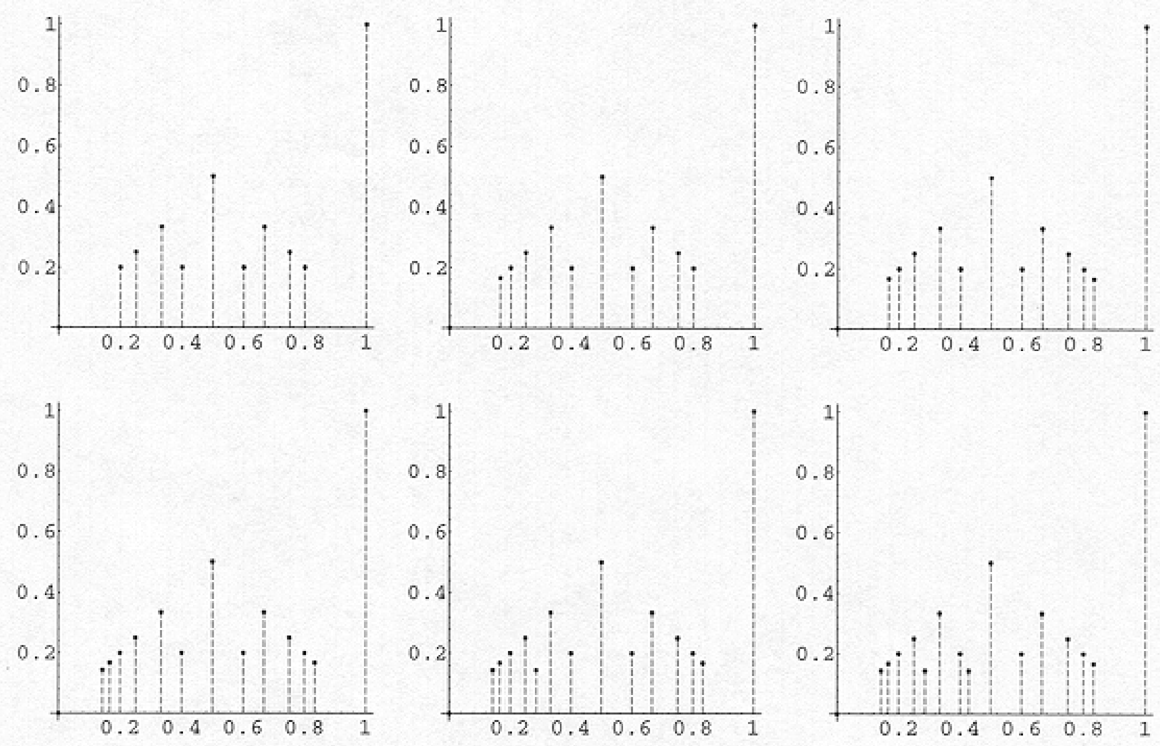


Figura 3. Da sinistra a destra, dall'alto al basso: la funzione g come limite di una successione crescente di funzioni nulle tranne in un numero finito di punti dell'intervallo $[0, 1]$.

4. Le funzioni integrabili secondo Riemann sono, in un certo senso, vicine alle funzioni a scala (funzioni costanti a tratti), cioè le funzioni che sono costanti in tutti i punti di ciascun sottointervallo aperto di una decomposizione finita dell'intervallo base $[a, b]$, potendo assumere valori ad arbitrio nei punti della suddivisione stessa (i valori che la funzione assume in tali punti non influenzano il valore dell'integrale).

La funzione f è integrabile secondo Riemann se (e solo se) esistono due funzioni a scala f_1 e f_2 tali che si abbia $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ e dunque

$$\int_a^b f_1 \cdot dx \leq \int_a^b f \cdot dx \leq \int_a^b f_2 \cdot dx$$

e al tempo stesso

$$\int_a^b f_2 \cdot dx - \int_a^b f_1 \cdot dx < \varepsilon \ .$$

Ciò comporta che f è necessariamente limitata, ed esiste una successione di funzioni a scala $(f_n(x))$ (ad esempio funzioni minoranti rispetto ad f: $f_n(x) \leq f(x)$) tali che si abbia

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f - f_n| \cdot dx = 0 \ .$$

Questo equivale a dire che, se si pone

$$\| f \| := \int_a^b | f | \cdot dx$$

f è limite secondo tale norma di una successione di funzioni a scala.

Se f è non negativa (vedremo tra breve che ci si può sempre ridurre a tale ipotesi) possiamo dire che l'idea dell'integrale di Riemann è quella di misurare il trapezoide subordinato

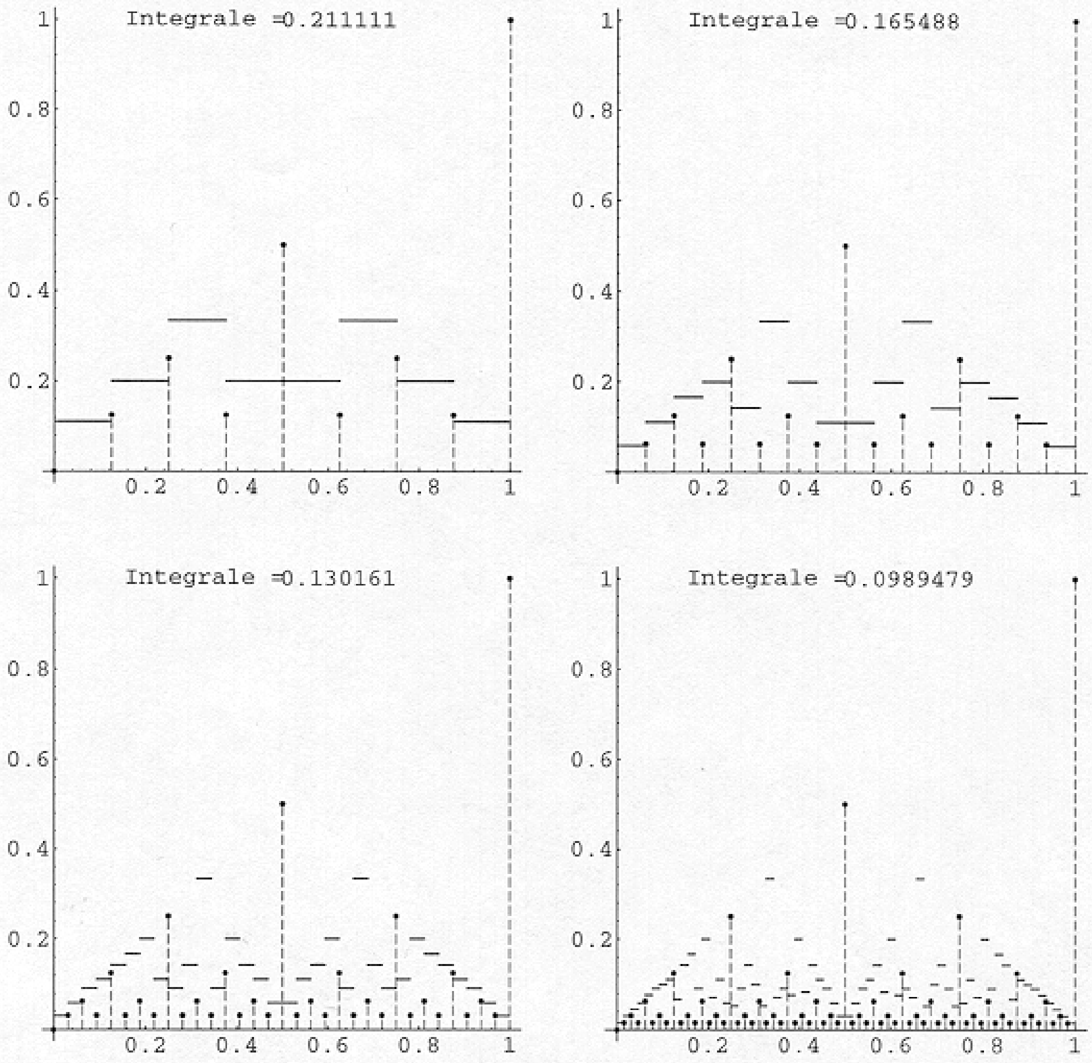


Figura 4. Alcune somme superiori relative alla funzione g e a scomposizioni dell'intervallo $[0, 1]$ in 2^n intervalli di uguale lunghezza. In figura: $n = 3, 4, 5, 6$.

dalla funzione f "comprimendolo" tra due plurirettagoli, ciascuno unione di un numero finito di rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati. Abbiamo già osservato che se una successione (f_n) di funzioni integrabili converge in ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ verso una funzione limite (convergenza semplice), ciò non implica necessariamente che tale funzione sia integrabile, né implica, nel caso lo sia, che il suo integrale coincida con il limite della successione degli integrali delle funzioni f_n. In altri termini, anche se la funzione limite è integrabile, non si ha necessariamente la relazione

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \cdot dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \cdot dx . \qquad (3)$$

Perché sussista tale relazione occorrono condizioni più forti sulla successione (f_n), ad esempio la convergenza uniforme. [*Segue al numero 63]*

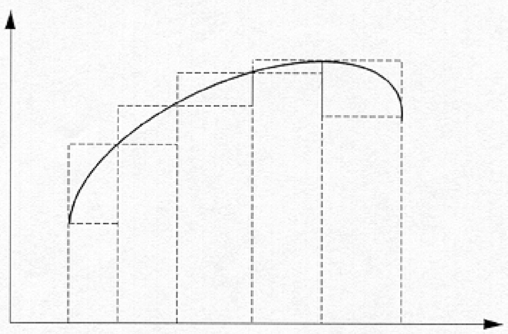


Figura 5. La funzione non negativa f è Riemann–integrabile se (e solo se) si possono trovare due plurirettangoli di aree arbitrariamente prossime tra loro che siano uno inscritto e l'altro circoscritto al trapezoide subordinato da f.