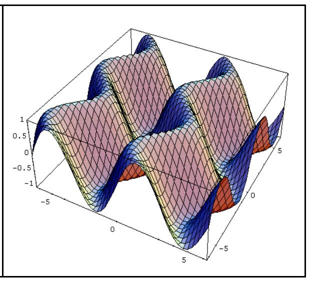
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 63 – gennaio 2003



Teoria della misura e integrale di Lebesgue

di Giulio Cesare Barozzi [*]

[3ª parte. *Segue dal numero* 62]

Un classico esempio relativo al fatto che la relazione (3) non sussiste necessariamente è quella della successione di funzioni definite nel modo seguente ($n \geq 2$):

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & per\ x = 0 \\ h_n > 0, & per\ x = 1/n \\ polinomiale\ di\ primo\ grado, & per\ x \in [0, 1/n]\ e\ x \in [1/n, 2/n] \\ nulla, & per\ x \in [2/n, 1] \end{cases}$$

Comunque vengano scelte le altezze h_n si ha

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

per ogni fissato $x \in [0, 1]$. Dunque il limite puntuale della successione (f_n) è la funzione nulla. D'altra parte è chiaro che si ha

$$\int_0^1 f_n \cdot dx = \frac{h_n}{n},$$

quindi la successione degli integrali può avere un qualsivoglia comportamento al limite a seconda della scelta dei numeri h_n. La successione degli integrali tende a 0 se (e solo se) $h_n = o(n)$, ad esempio per $h_n = \sqrt{n}$. Per avere la convergenza uniforme della successione $f_n(x)$ alla funzione nulla occorre invece che sia $lim_{n\to\infty}\, h_n = 0$.

5. Per definire l'integrale di Lebesgue (cosi denominato dal nome del matematico francese Henri-Léon Lebesgue, 1875 -1941), si definisce, per cominciare, una misura sulla retta reale.

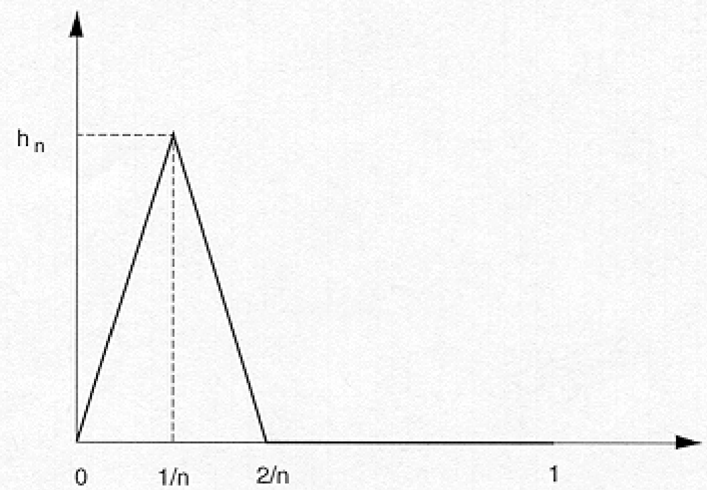


Figura 6. La successione di funzioni f_n converge puntualmente alla funzione nulla comunque vengano scelte le altezze h_n.

Consideriamo una famiglia $\mathcal{F}$ di parti di $\boldsymbol{R}$ tali che
(a) $\mathcal{F}$ contiene l'insieme vuoto;
(b) Se $E_1, E_2, \ldots$ sono elementi di $\mathcal{F}$, in quantità finita o numerabile, $\mathcal{F}$ contiene anche la loro unione e la loro intersezione;
(c) se $\mathcal{F}$ contiene un insieme E, contiene anche il suo complementare rispetto a $\boldsymbol{R}$.

La famiglia $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di parti di $\boldsymbol{R}$, dove la lettera σ sta a ricordarci che la proprietà di chiusura (in senso algebrico) della famiglia $\mathcal{F}$ vale non solo per unioni e intersezioni finite di suoi membri, ma anche per unioni e intersezioni numerabili.

Ad ogni elemento E di $\mathcal{F}$ associamo la quantità $\mu(E)$, con $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$, dunque definiamo una funzione
$\mu : \mathcal{F} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+ := \boldsymbol{R}_+ \cup \{+\infty\}$,
tale che si abbia
1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) per ogni famiglia finita o numerabile $E_1, E_2, \ldots$ di parti di $\mathcal{F}$ a due a due disgiunte si abbia

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mu(E_i).$$

Si dice allora che è stata definita una misura sulla σ-algebra $\mathcal{F}$ e gli elementi di $\mathcal{F}$ vengono chiamati insiemi misurabili rispetto a μ (in breve: μ-misurabili).

Ad esempio, si può costruire una famiglia $\mathcal{F}$ a partire dagli intervalli di $\boldsymbol{R}$, a cui associamo come misura l'ordinaria lunghezza

$\mu([a, b]) := b - a$,

ed applicare ripetutamente l'operazione di unione e intersezione su famiglie tanto finite quanto numerabili. Si ottiene così un misura sulla retta reale, detta misura di Lebesgue.
Da questo momento in poi faremo esclusivamente riferimento a tale misura.

Una conseguenza interessante della definizione posta è che insiemi ridotti ad un punto, in quanto intervalli di lunghezza nulla, hanno misura nulla

$\mu(\{a\}) = 0$,

e di conseguenza ogni insieme numerabile, in quanto unione numerabile di insiemi di misura nulla a due a due disgiunti, è ancora di misura nulla.
Ad esempio

$\mu(\boldsymbol{Q} \cap [0, 1]) = 0$.

A parole: i razionali dell'intervallo $[0, 1]$ costituiscono un insieme di misura nulla.

Si dice che una proprietà sussiste quasi ovunque (abbreviato: q.o.) su un determinato insieme, se essa sussiste in tutti i punti di tale insieme ad eccezione, al più, di quelli di un sottoinsieme di misura nulla.
Dunque la funzione di Dirichlet vista nel paragrafo 2 è nulla q.o., mentre quella vista nel paragrafo 3 è nulla e continua q.o.

6. Sia f una funzione a valori reali, che possiamo supporre definita su tutto $\boldsymbol{R}$, prolungandola, se necessario, fuori dal suo dominio originario ponendola uguale a 0. Diremo che essa è *misurabile* se, per ogni a reale, l'insieme dei punti in cui si ha $f(x) < a$,

$\{x \in \boldsymbol{R} \mid f(x) < a\}$

è misurabile.
Se f è misurabile, secondo la definizione appena posta, è misurabile, per ogni reale a, anche l'insieme dei punti in cui $f(x) \geq a$, l'insieme dei punti in cui si ha $a \leq f(x) < b$, per ogni coppia di reali a e b, con $a < b$, ecc. Se f è misurabile, tale è anche $-f$, $|f|$, la parte positiva e la parte negativa di f:

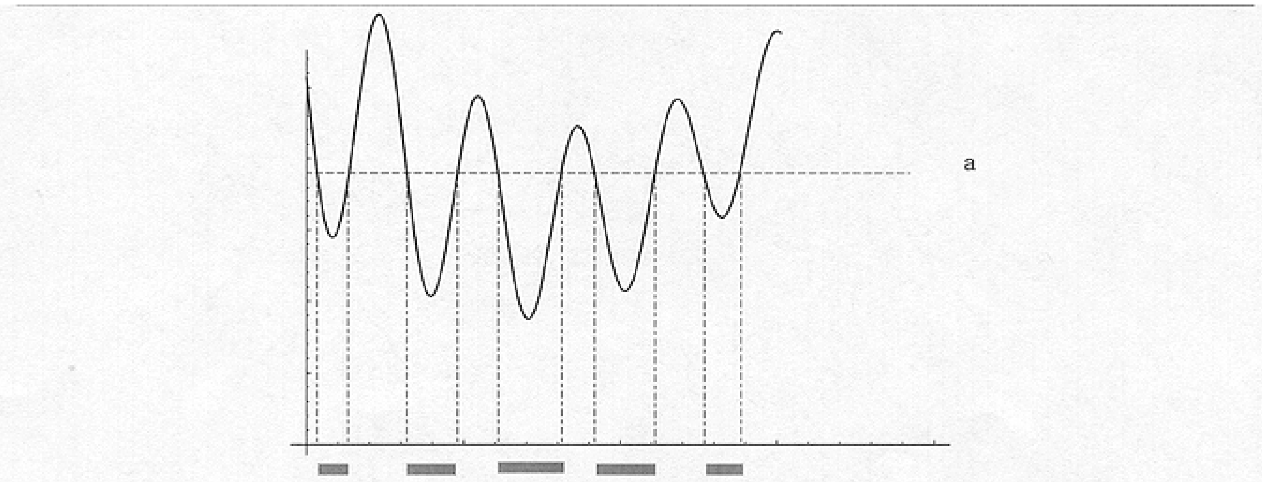


Figura 7. La funzione f è misurabile se l'insieme dei punti in cui essa è inferiore ad a, per ogni $a \in R$, è misurabile.

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2},$$

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \frac{-f(x) + |f(x)|}{2}.$$

Somme e prodotti di funzioni misurabili sono ancora misurabili. Va da sé che tutte queste affermazioni richiedono un'accurata dimostrazione.

Si chiama *funzione semplice* una funzione misurabile che assume soltanto un numero finito di valori. Questi valori sono assunti su insiemi più o meno complicati. Ad ironia del nome, la funzione di Dirichlet del paragrafo 2 è semplice: essa assume soltanto i valori 0 (sull'insieme $[0, 1] \setminus \boldsymbol{Q}$) e 1 (sull'insieme $[0, 1] \cap \boldsymbol{Q}$) entrambi misurabili: il secondo ha misura nulla, in quanto numerabile, il primo ha misura 1 in quanto ottenuto dall'intervallo $[0, 1]$ mediante rimozione di un insieme di misura nulla. Se la funzione viene prolungata mediante lo zero su tutto $\boldsymbol{R}$, al primo insieme devono essere aggiunti gli intervalli aperti $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$.

Al contrario, la funzione del paragrafo 4 (che pure è Riemann-integrabile, mentre quella precedente non lo è) non è una funzione semplice, in quanto la sua immagine contiene 0, 1 e tutti i razionali del tipo $1/q$, con $q > 0$.

Le funzioni costanti a tratti che servono per definire l'integrale di Riemann di $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ potrebbero essere chiamate *funzioni semplicissime*: non soltanto esse assumono un numero finito di valori (cioè hanno come immagine un insieme finito), ma ciascuno di tali valori è assunto su un sottointervallo limitato di $[a, b]$ oppure sull'unione di un numero finito di sottointervalli limitati di $[a, b]$.

7. Osserviamo che ogni funzione a valori reali si può scrivere come differenza tra due funzioni non negative, e precisamente

$f = f^+ - f^-$.

Consideriamo dunque una funzione f non negativa. Il punto di partenza della teoria dell'integrale di Lebesgue può essere il teorema seguente:
Teorema. Ogni f misurabile non negativa è limite di una successione crescente di funzioni semplici $f_n(x)$.
L'aggettivo crescente viene inteso in senso lato; la convergenza di cui parla l'enunciato è la convergenza semplice (= puntuale). Per dare un'idea della dimostrazione, possiamo immaginare di introdurre una scomposizione sul semiasse positivo delle ordinate mediante una sequenza strettamente crescente di numeri reali

$$y_0^{(1)} = 0 < y_1^{(1)} < \ldots < y_{k_1}^{(1)}.$$

[*Segue al numero 65*]

[*] *Docente di Analisi Matematica – Università degli Studi di Bologna*