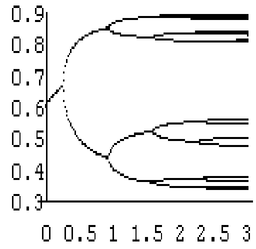
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 65 – marzo 2003



Teoria della misura e integrale di Lebesgue

di Giulio Cesare Barozzi [*]

[Parte 4. *Segue dal numero 63*]
L'indice 1 posto in alto sta a specificare che si tratta di una prima scomposizione. Per ogni fissato $k = 0, 1, 2, \dots, k_1 - 1$, sia E_k l'insieme dei punti in cui la f è compresa tra $y^{(1)}_k$ e $y^{(1)}_{k+1}$, cioè

$$E_k := \left\{ x \in R \,\middle|\, y_k^{(1)} \le f(x) \le y_{k+1}^{(1)} \right\}$$

e sia

$$E_{k_1} := \left\{ x \in R \,\middle|\, y_{k_1}^{(1)} \le f(x) \right\}$$

Per ogni k, l'insieme E_k è misurabile.
Gli insiemi E_k diversi dall'insieme vuoto costituiscono una partizione di $\boldsymbol{R}$ (ogni numero reale appartiene ad uno ed uno solo di tali insiemi). Possiamo allora definire f_1 nel modo seguente:
$f_1(x) := y_k^{(1)}$, per $x \in E_k$.
A parole: in corrispondenza dei punti di E_k abbassiamo il grafico di f fino alla quota $y_k^{(1)}$. Evidentemente f_1 è una funzione semplice, minorante f. Il trapezoide subordinato da f_1 (se è ancora lecito chiamarlo con tale nome) è l'unione, al variare di k, dei prodotti cartesiani $E_k \times [0, y_k^{(1)}]$. Ciascuno di essi è a sua volta unione di segmenti "verticali", tutti di lunghezza $y_k^{(1)}$, le cui proiezioni sull'asse delle ascisse descrivono l'insieme misurabile E_k.

Immaginiamo ora di aggiungere un nuovo punto

$$y_{k_1+1}^{(1)} > y_{k_1}^{(1)}$$

e di raffinare la precedente scomposizione, ad esempio inserendo il punto medio tra ciascuna delle coppie $y_k^{(1)}, y_{k+1}^{(1)}$. Otteniamo una seconda scomposizione operata dai punti $y_k^{(2)}$, con $k = 0, 1, \dots, k_2$. In corrispondenza di questa seconda scomposizione possiamo definire la funzione f_2 in modo del tutto simile a quanto fatto per f_1. Evidentemente si ha
$f_1(x) \le f_2(x) \le f(x)$
per ogni x.

Così, procedendo mediante successivi ampliamenti verso l'alto e raffinamenti delle scomposizioni sul semiasse positivo delle ordinate, si viene a costruire la successione (f_n) di cui parla l'enunciato precedente. La condizione

$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n}^{(n)} = +\infty$$

consente di trattare indifferentemente funzioni limitate oppure illimitate superiormente.

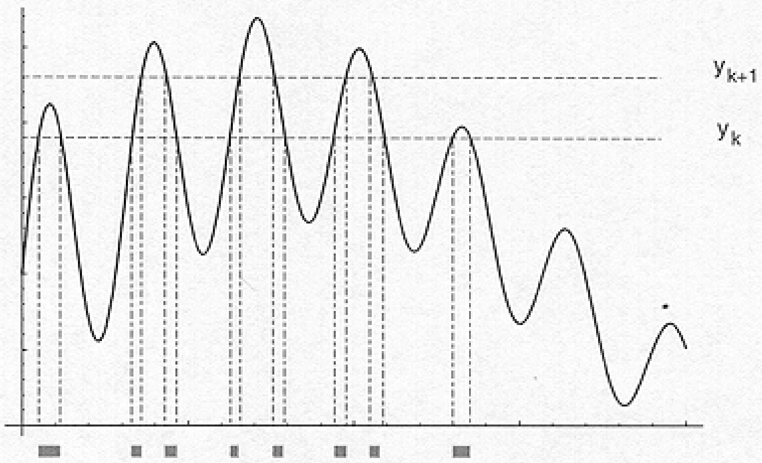


Figura 8. L'insieme dei punti in cui la funzione misurabile f assume valori compresi tra due valori assegnati, è misurabile.

8. Sia g una funzione semplice, che assume i valori $c_1, c_2, \dots, c_n$ sugli insiemi misurabili $E_1, E_2, \dots, E_n$. Se μ_k è la misura di E_k,
$\mu_k := m(E_k)$.
definiamo l'integrale di Lebesgue di g ponendo

$$\int_R g(x)\cdot dx := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mu_k \qquad (3)$$

con la convenzione $0 \cdot \infty := 0$. Con tale convenzione, se la g è nulla fuori dell'intervallo $[a, b]$ (si dice che ha il supporto contenuto in $[a, b]$), si ha anche

$$\int_a^b g(x)\cdot dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mu_k \qquad (3')$$

con $\mu_k = m(E_k \cap [a,b])$.

Ad esempio, per la funzione di Dirichlet del paragrafo 2, sia $f(x)$, i valori assunti sono $c_1 = 0$ su un insieme di misura $\mu_1 = 1$, e $c_2 = 1$ su un insieme di misura nulla: $\mu_2 = 0$, quindi

$$\int_0^1 f(x)\cdot dx = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 .$$

Sia ora f una funzione misurabile non negativa; approssimiamola (v. Teorema 1) mediante una successione crescente di funzioni semplici f_n, per le quali è stato appena definito l'integrale. Si pone

$$\int_R f(x)\cdot dx := \lim_{n\to\infty} \int_R f_n(x)\cdot dx . \tag{4}$$

Il limite a secondo membro, in quanto limite di una successione crescente in $\overline{\mathrm{R}}_+$, esiste finito o infinito. Si può dimostrare che, se f viene approssimata in modo diversi da successioni crescenti di funzioni semplici, il limite in questione è indipendente dalla scelta della successione approssimante.

Diremo che f è sommabile (Lebesgue-integrabile) se il limite (4) sussiste finito. Se poi f non è di segno costante, si ha
$f=f^+ - f^-$;
si dice in tal caso che f è sommabile se tali sono f^+ e f^- e si pone

$$\int_R f(x)\cdot dx = \int_R f^+(x)\cdot dx - \int_R f^-(x)\cdot dx \tag{5}$$

Se uno (almeno) degli integrali di f^+ o f^- non è finito, f non è sommabile.

Ad esempio, la funzione $f(x)$ che vale 0 nell'origine e $1/x$ fuori di essa, non è sommabile sull'intervallo $[-1, 1]$, in quanto sia f^+ che f^- hanno integrale infinito.

L'integrale di Lebesgue gode delle proprietà consuete dell'integrale (linearità rispetto alla funzione integranda, additività rispetto al dominio di integrazione, ecc.). Se f è integrabile nel senso di Riemann, essa è tale anche nel senso di Lebesgue e i due integrali coincidono.

Si osservi che nelle definizioni precedenti non si è necessariamente supposto f limitata, né che essa sia nulla fuori da un intervallo compatto. L'integrale di Lebesgue contiene dunque gli "integrali generalizzati" (o impropri) come casi particolari, sempre che tali integrali siano assolutamente convergenti. Dall'uguaglianza

$$|f| = f^+ + f^-$$

segue che la sommabilità di f implica quella di $|f|$. La nozione di integrale generalizzato «semplicemente convergente» (in qualche modo analoga a quella di serie semplicemente convergente) è propria dell'integrale di Riemann e non esiste per l'integrale di Lebesgue.

9. Da quanto precede si potrebbe trarre l'impressione che lo scopo principale dell'integrale di Lebesgue sia quello di estendere la nozione di integrale ad una classe di funzioni più ampia di quella delle funzioni Riemann-integrabili. Questo aspetto è certamente presente, ma l'utilità dell'estensione compiuta può essere apprezzata soltanto considerando il problema dell'integrabilità di una funzione limite di funzioni integrabili ed il problema della liceità del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Due sono i risultati principali in tale direzione.

Teorema della convergenza dominata di Lebesgue (1904):
Se la successione di funzioni sommabili $f_n(x)$ converge q.o. verso la funzione limite $f(x)$, ed esiste una funzione sommabile $g(x)$ tale che si abbia $|f_n(x)| \le g(x)$ per ogni x, allora
a) la funzione limite $f(x)$ è sommabile;
b) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n \cdot dx = \int_R f(x) .$$

Teorema di B. Levi (1906):
Sia $f_n(x)$ una successione crescente di funzioni sommabili. Se esiste un numero A tale che sia

$$\int_R f_n \cdot dx \le A \quad , \quad \forall n ,$$

allora
a) $f_n(x)$ tende q.o. verso una funzione sommabile f;
b) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n \cdot dx = \int_R f(x) .$$

La dimostrazione di questi risultati è impegnativa sul piano tecnico, e questo spiega perché l'integrale di Lebesgue venga spesso tralasciato, anche in corsi di livello universitario.

10. Presentiamo alcuni esempi.
Esempio 1.
Riprendiamo in considerazione la successione di funzioni $f_n(x)$ considerate nel paragrafo 4 (v. fig. 6) con la scelta $h_n = \sqrt{n}$. Se si pone $g(x) = 1/(\sqrt{x})$ per $0 < x \le 1$ (e non importa che cosa per $x = 0$) si ha che g è sommabile sull'intervallo $[0, 1]$ (essa è Riemann-integrabile in senso improprio ed è > 0) ed inoltre si ha
$0 \le f_n(x) \le g(x)$
per ogni $x \in [0, 1]$ e per ogni n. È dunque applicabile il teorema di Lebesgue.
Esempio 2.
Consideriamo la successione di funzioni definite sull'intervallo $[0, 1]$ ponendo

$$f_n(x) := \frac{n\cdot x}{1+n^2\cdot x^2}$$

[*Segue al numero 66*]

[*] *Docente di Analisi Matematica presso l'Università degli Studi di Bologna*

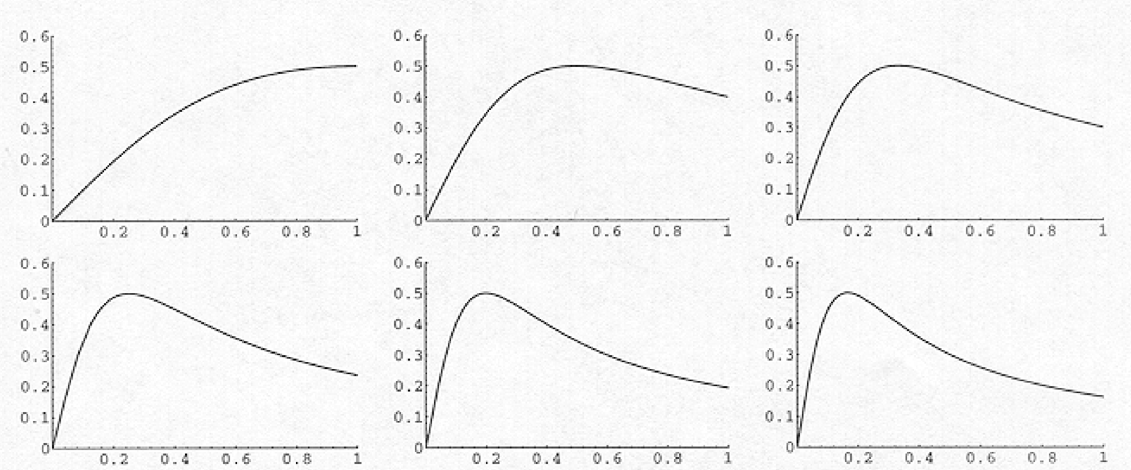


Figura 9. Da sinistra a destra e dall'alto al basso, i grafici delle funzioni f_n, per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.