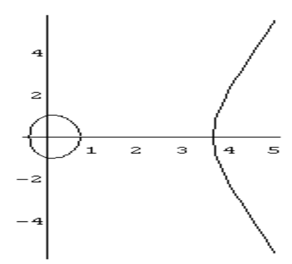
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 66 – aprile 2003



Teoria della misura e integrale di Lebesgue

di Giulio Cesare Barozzi [*]

[Parte 5. *Segue dal numero 65*] Per ogni fissato x la successione $f_n(x)$ tende a 0 per $n \to \infty$. Dall'esame della derivata prima

$$f_n^I(x) = n \cdot \frac{1-n^2 \cdot x^2}{\left(1+n^2 \cdot x^2\right)^2}$$

si deduce che f_n raggiunge il proprio massimo nel punto $x=1/n$, avendosi

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \forall n .$$

Dunque la convergenza non è uniforme, ma tutte le funzioni f_n sono maggiorate dalla funzione costante $g(x) = 1/2$, che è ovviamente sommabile sull'intervallo $[0, 1]$. Dunque la successione degli integrali delle funzioni f_n tende a 0, in virtù del teorema di Lebesgue.
In questo caso, come nel precedente, è agevole anche una verifica diretta: si trova infatti

$$\int_0^1 f_n(x) \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \log\left(1+n^2\right) < \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \log\left(n^2+n^2\right) = \frac{\log 2 + 2 \cdot \log n}{2 \cdot n} \to 0 \quad , \quad \text{per } n \to \infty .$$

Esempio 3.
Consideriamo la successione di funzioni definite sull'intervallo illimitato $[0, +\infty[$ ponendo

$$f_n(x) := \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n, & per\ 0 \le x \le \sqrt{n} \\ 0 \quad , & per\ x > \sqrt{n} \end{cases}$$

Tale successione converge, per ogni $x \ge 0$, alla funzione

$$f(x) = e^{-x^2}$$

che è sommabile sul semiasse positivo con integrale uguale a $(\sqrt{\pi})/2$ (integrale di Gauss). Inoltre si ha $f_n(x) \le f(x)$, in quanto, mediante il cambiamento di variabile $x^2/n = t$, tale disuguaglianza viene ricondotta alla disuguaglianza evidente

$$1 - t \le e^{-t} \quad , \qquad 0 \le t \le 1 .$$

Possiamo dunque prendere come funzione maggiorante la stessa f ed applicare il teorema di Lebesgue:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n \cdot dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \cdot dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

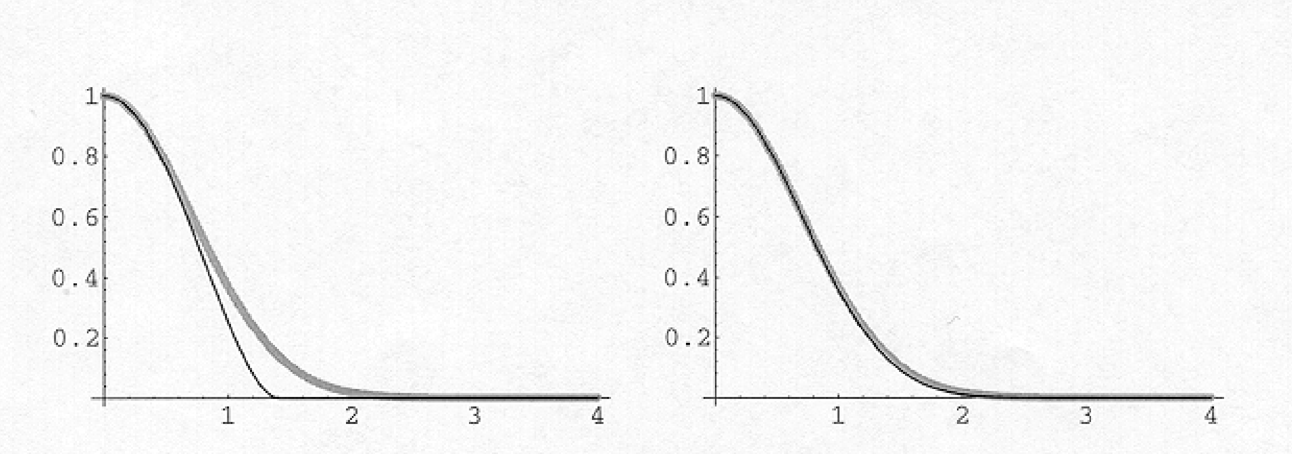


Figura 10. I grafici delle funzioni f_2 (a sinistra) e f_{20} (a destra). In grigio il grafico della funzione e^{-x^2}.

11. Concluderemo con le parole stesse di Lebesgue, riprese da un articolo divulgativo del 1926, in cui egli cercava di spiegare in termini non tecnici la differenza tra l'integrazione in senso classico, (che, a partire dal metodo di esaustione dei greci, aveva trovato una sua sistemazione coerente verso la metà del secolo diciannovesimo ad opera di B. Riemann) e la nuova concezione che egli stesso aveva introdotto all'inizio del nostro secolo.

«I geometri del diciassettesimo secolo consideravano l'integrale di $f(x)$ - la parola "integrale" non era ancora stata inventata, ma non importa - come la somma di un'infinità di indivisibili, ognuno dei quali era l'ordinata, positiva o negativa, di $f(x)$. Benissimo! Noi abbiamo semplicemente raggruppato insieme gli indivisibili di grandezza vicina. Abbiamo, come si dice in algebra, riunito i termini simili. Si potrebbe dire che, secondo il procedimento di Riemann, si cerca di sommare gli indivisibili prendendoli nell'ordine nel quale ci sono forniti dalla variazione di x, come un commerciante confusionario che conta monete e biglietti a caso, nell'ordine in cui gli vengono dati, mentre noi operiamo come un commerciante metodico, che dice:

ho $\mu(E_1)$ monete da 100, che valgono $100 \cdot \mu(E_1)$
ho $\mu(E_2)$ biglietti da 500, che valgono $500 \cdot \mu(E_2)$
ho $\mu(E_3)$ biglietti da 1000, che valgono $1000 \cdot \mu(E_3)$
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Tutto insieme ho

$$S = 100 \cdot \mu(E_1) + 500 \cdot \mu(E_2) + 1000 \cdot \mu(E_3) + \ldots$$

I due procedimenti porteranno di certo il commerciante allo stesso risultato, poiché, per quanti soldi abbia, c'è solo un numero finito di monete e di biglietti da contare. Ma per noi, che dobbiamo sommare un numero infinito di indivisibili, la differenza dei due metodi è di capitale importanza.»

[*] *Docente di Analisi Matematica presso l'Università degli Studi di Bologna*

Cardinalità di partizioni e suriezioni di insiemi finiti

di Luciano Corso

Il concetto di partizione è uno dei più intuitivi e fecondi in teoria della misura. Consideriamo un insieme X e supponiamo che sia divisibile in n parti, con $n \in \mathbf{N}$. Come è noto per *partizione* dell'insieme X si intende una divisione dell'insieme X tale che se x_j e x_k sono due parti di detta divisione deve essere vero che:

(1) $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_j \neq \varnothing$

(2) $\left[\forall\,(j,k) \in \{1, \ldots, n\}^2,\, j \neq k\right], \quad x_j \cap x_k = \varnothing$

(3) $\bigcup_{j=1}^{n} x_j = X$

L'insieme X può essere discreto o continuo, finito o no. Le partizioni, in ogni caso, devono, per noi, essere costituite da parti finite. Le partizioni sono applicazioni; un gioco può aiutare a capirne il tipo e a determinarne la cardinalità.

Consideriamo $|D|$ palline e $|C|$ scatole distinguibili (ogni pallina e ogni scatola sono caratterizzate da un nome o un segno che le contraddistingue). Quindi, applichiamo la seguente regola: si prendono tutte le palline e le si pongono nelle scatole, in modo che poi nessuna pallina rimanga fuori e tutte le scatole contengano almeno una pallina.. Naturalmente il vincolo che ogni scatola non possa essere vuota caratterizza il concetto di partizione e anche quello di *suriezione*. Il vincolo deve almeno presupporre che $|C| \leq |D|$, altrimenti ci saranno, dopo ogni applicazione, delle scatole vuote, contro (1) e il concetto stesso di suriezione. Una volta fatta questa operazione si è ottenuto una partizione dell'insieme delle $|D|$ palline in $|C|$ parti. Una partizione è una applicazione suriettiva, ma non tutte le suriezioni da D a C generano partizioni distinte. Vi sono più suriezioni per ogni partizione. Quindi non si possono confondere le suriezioni con le partizioni: i due concetti non sono uguali. Partizione significa dividere in parti un insieme nel rispetto di (1), (2), (3). Suriezione significa, invece, porre palline distinguibili in scatole distinguibili non lasciandone di vuote. Vogliamo ora far vedere che applicazioni suriettive distinte generano identiche partizioni e perciò le suriezioni sono di più. Per rendersi conto di ciò facciamo un esempio: consideriamo un insieme di $|D|$=3 palline e di $|C|$=2 scatole. Determiniamo le partizioni e le suriezioni possibili:

(1) (2 3)	(1 2) (3)
(2) (1 3)	(1 3) (2)
(3) (1 2)	(2 3) (1)

Come si può vedere le suriezioni sono 6, ma le partizioni non sono 6: sono 3. Cioè o quelle della prima colonna o quelle della seconda. Nell'idea di partizione non si considera lo scambio delle parti e quindi le 2 distinte suriezioni [(1) (2 3)] e [(2 3) (1)] sono la stessa partizione. Si può notare come le suriezioni siano tutte le permutazioni delle partizioni.

Passiamo ora a contare, per costruzione, le partizioni e le suriezioni possibili. Vediamo innanzi tutto se è possibile contare le partizioni. Consideriamo la funzione $S(n,k)$ (numero di Stirling di II specie) che conta tutte le partizioni di un n-insieme in k-parti. Se k=1 allora $S(n,1)$=1; c'è infatti una sola partizione di un n-insieme, prendendolo in blocco, e ciò non dipende da n. Se k=0 allora $S(n,0)$=0, non c'è infatti alcun modo di ripartire un insieme di n elementi in 0 parti, se mancano cioè contenitori. Si può veder ora cosa accade quando k=n, cioè quando abbiamo tante palline quanti contenitori. Per il concetto stesso di suriezione si ha: $S(n,n)$=1, cioè c'è un solo modo di porre le n palle nelle n possibili scatole (ma se volessimo contare le suriezioni, allora dovremmo considerare $n!$ suriezioni). Ci rimane da considerare il caso più generale. Consideriamo il caso in cui vi siano n+1 palle da inserire in k scatole. Il numero di Stirling in questo caso è $S(n+1,k)$. Per capire quanto vale tale numero supponiamo di conoscere $S(n, k\text{-}1)$ e anche $S(n,k)$. Ora l'$(n+1)$-esima pallina può formare diverse partizioni in due modi distinti: o da k-1 parti si passa a una partizione di k parti facendo nascere una nuova parte che contenga la nuova pallina e in tal caso $S_1(n+1,k) = S(n,k\text{-}1)$, o la nuova pallina forma diverse partizioni andando a finire in una delle parti delle $S(n, k)$ partizioni già esistenti. In tal caso $S_2(n+1,k)$=$k\ S(n,k)$ poiché la $(n+1)$-esima pallina può entrare in k modi nelle $S(n,k)$ partizioni esistenti. Perciò o l'uno o l'altro di questi modi forma aritmeticamente il valore delle nuove partizioni: $S(n+1,k) = S(n,k\text{-}1) + k\,S(n,k)$, con $1 < k < n$. L'inconveniente di questa relazione è che può essere usata solo iterativamente. In sostanza, il numero delle partizioni di un $|D|$=n-insieme in $|C|$=k parti si determina nel modo seguente:

$$\begin{cases} S(n,0) = 0 \\ S(n,1) = 1 \\ S(n,n) = 1 \\ S(n+1,k) = S(n,k-1) + k \cdot S(n,k) \ , \quad 1 < k < n \end{cases}$$

Per esempio con riferimento al nostro caso n=3 e k=2 si ha: S(3,2)=S(2,1)+2·S(2,2)=1+2·1=3.

Vediamo ora come calcolare la cardinalità delle suriezioni. È facile capire che la differenza sta nelle permutazioni delle parti (scatole). Perciò se indichiamo con $Sur(n,k)$ la cardinalità delle suriezioni di un n-insieme in k-parti si ha: $Sur(n,k) = k! \cdot S(n,k)$.

Nel nostro caso si ha: $Sur(3,2)$=2!·S(3,2)=2·3=6. Ciò, come si vede sopra, corrisponde effettivamente a quanto calcolato con procedura sperimentale.

Lo studio delle partizioni è fondamentale nel calcolo delle probabilità in quanto lo spazio campionario Ω è costituito sempre da una specifica partizione, partizione legata sempre ad almeno un evento che diventa l'oggetto di studio e origina di solito la partizione stessa. Sapere quante sono le partizioni possibili con riferimento ad un certo spazio di eventi possibili, significa sapere quanti spazi campionari possibili si possono ottenere a partire da determinati eventi.