MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 67 – maggio 2003

Molti insiemi infiniti sono numerabili

di Ruggero Ferro

Per insiemi infiniti può succedere che un insieme A sia equinumeroso ad un suo sottoinsieme (proprio) B e, per quanto visto in MatematicaMente n. 59, il sottoinsieme B abbia un numero minore o uguale di elementi dell'insieme A, poiché la funzione identica su B è una funzione iniettiva da B in A.

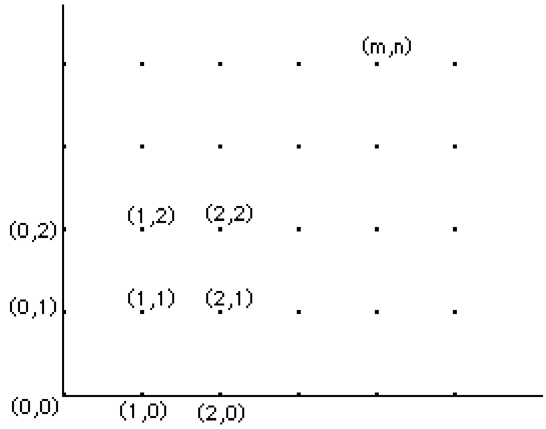
Abbiamo scelto di considerare la collezione dei numeri naturali un insieme, e di questa scelta ne abbiamo fatto un assioma, sicché ci sono insiemi infiniti, alcuni dei quali saranno equinumerosi all'insieme dei numeri naturali che diventa così un riferimento per misurare la quantità di elementi di insiemi infiniti. Chiameremo *numerabile* un insieme che ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali. A questo punto sorge naturale la domanda se ci sono insiemi infiniti di un'infinità diversa da, o maggiore di, quella dei numeri naturali.

Un primo tentativo di costruire insiemi di cardinalità maggiore potrebbe essere quello di considerare la cardinalità dell'unione di due insiemi infiniti disgiunti. Mediante l'unione di insiemi disgiunti si potrebbe definire l'operazione di somma tra cardinalità nel modo seguente: dati due insiemi disgiunti la somma delle loro cardinalità è la cardinalità dell'insieme unione dei due. Si noti che questa operazione applicata a cardinalità di insiemi finiti dà la nota operazione di addizione tra i numeri naturali che contano la quantità degli elementi di ciascuno dei due insiemi dati.

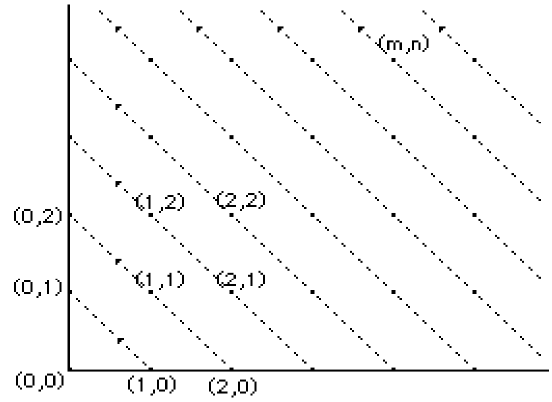
Ma l'addizione così definita, per insiemi infiniti dà risultati in un certo senso sorprendenti. Si considerino ad esempio due insiemi disgiunti numerabili, la loro unione sarà ancora numerabile. Infatti, sfruttando la biiettività tra i numeri naturali e i numeri pari, si può costruire una biiettività dal primo insieme dato sui numeri pari; analogamente si può costruire una biiettività dal secondo insieme dato sui numeri dispari, e unendo le due biiettività si ottiene una biiettività dall'unione dei due insiemi dati sui numeri naturali, giustificando così l'affermazione che anche l'unione è numerabile.

Un secondo tentativo potrebbe essere quello di considerare non due insiemi numerabili ma un numero numerabile di insiemi numerabili e disgiunti e vedere quanti elementi ci sono in totale. Poiché si considera un numero numerabile di insiemi numerabili ognuno può essere identificato con il numero naturale i che gli corrisponde e gli elementi dell'insieme numerabile che corrisponde a i possono essere messi in corrispondenza biiettiva con le coppie ordinate di numeri naturali (n,i). Così il numero totale degli elementi nei vari insiemi è in corrispondenza biiettiva con le coppie ordinate di numeri naturali, e il problema diviene come stabilire quante sono le coppie ordinate di numeri naturali, detto altrimenti, stabilire la cardinalità del prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri naturali con se' stesso. Mediante il prodotto cartesiano di insiemi si può definire l'operazione di prodotto tra cardinalità nel modo seguente: dati due insiemi, A e B, il prodotto delle loro cardinalità, $|A|\times|B|$, è la cardinalità dell'insieme prodotto cartesiano dei due, $|A\times B|$. Si noti che questa operazione applicata a cardinalità di insiemi finiti dà la nota operazione di moltiplicazione tra i numeri naturali che contano la quantità degli elementi di ciascuno dei due insiemi dati.

Le coppie ordinate di numeri naturali possono essere pensate come i punti di coordinate naturali del primo quadrante di un piano cartesiano.



Una volta disposte le coppie ordinate di naturali come è illustrato nella figura, ci si accorge che si può cercare di metterle in corrispondenza biiettiva con i numeri naturali, partendo dalla coppia ordinata (0,0) e proseguendo con le coppie ordinate che hanno ugual somma delle due componenti, cominciando da quelle che hanno somma più piccola, e, a parita; di somma, da quella che ha il secondo numero più piccolo. Le coppie ordinate che hanno ugual somma sono quelle disposte lungo le linee oblique raffigurate nel seguente disegno.



È evidente che ad ogni coppia ordinata di numeri naturali corrisponde un numero d'ordine di quella coppia nell'ordinamento descritto, e che, viceversa, ogni numero naturale è il numero d'ordine, nell'ordine descritto, di una specifica coppia ordinata. Così c'è una biiettività dall'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali sull'insieme dei numeri naturali, e i due insiemi sono equinumerosi, hanno la stessa cardinalità.

Di fatto, data la coppia ordinata di numeri naturali (m, n), non è difficile calcolare il suo posto d'ordine nell'ordinamento descritto. Sia $k = m+n$. Le coppie ordinate con somma delle componenti uguale ad h sono $h+1$, e cioè $(h, 0)$, $(h\text{-}1, 1)$, $(h\text{-}2,2)$, ... , $(1, h\text{-}1)$, $(0, h)$. Le coppie ordinate che precedono la coppia (m,n) sono quelle lungo le linee oblique con somma delle componenti della coppia minore di k, più le n coppie con somma delle componenti uguale a k ma con seconda componente minore di n. Così le coppie ordinate che precedono (m,n) saranno $(0+1)+(1+1)+...+(k\text{-}1+1)+n =1+2+...+k+n$. Per la nota formula di Gauss $1+2+...+k = k(k+1)/2$, il numero d'ordine della coppia ordinata di numeri naturali (m, n) è $n+[(m+n)\times(m+n+1)/2]$. Anche con questa operazione di prodotto non si è riusciti ad andare oltre il numerabile.

Se si accetta l'assioma della scelta, i risultati precedenti si inquadrano nella seguente situazione più generale: al solito si indichino con $|A|$ e $|B|$ le numerosità (cardinalità) degli insiemi A e B e si supponga che sia $|A|$ che $|B|$ siano maggiori od uguali a 2. Sono immediate le seguenti disuguaglianze: sia $|A|$ che $|B|$ sono minori od uguali alla più grande tra le due cardinalità; questa è minore od uguale alla somma $|A|+|B|$ delle due cardinalità; questa è minore od uguale alla somma della maggiore delle due cardinalità iniziali con sé stessa; che è minore od uguale al prodotto $|A|\times|B|$ delle cardinalità (per l'ipotesi che entrambe siano maggiori od uguali a 2); e quest'ultima è minore od uguale a al prodotto della maggiore delle due cardinalità iniziali con sé stessa. Sinteticamente:
$max\{|A|,|B|\} \leq (|A|+|B|) \leq (max\{|A|,|B|\}+max\{|A|,|B|\}) \leq (|A|\times|B|) \leq (max\{|A|,|B|\}\times max\{|A|,|B|\})$.
Se poi $max\{|A|,|B|\}$ è una cardinalità infinità, allora $(max\{|A|,|B|\} \times max\{|A|,|B|\}) = max\{|A|,|B|\}$. Questo risultato è stato dimostrato nel caso di infinità numerabile, ma può essere dimostrato per una qualsiasi infinità usando l'assioma della scelta e le proprietà dei buoni ordinamenti che qui non sono state ancora sviluppate, sicché lo si dimostrerà in un altro momento e per ora lo si dà per acquisito. Mettendo assieme gli ultimi risultati, e supponendo che $max\{|A|,|B|\}$ sia una cardinalità infinità e che $|A| \leq 2$ e $|B| \leq 2$, si ha che:
$max\{|A|,|B|\} \leq (|A|+|B|) \leq (max\{|A|,|B|\}+max\{|A|,|B|\}) \leq (|A|\times|B|) \leq (max\{|A|,|B|\}\times max\{|A|,|B|\}) = max\{|A|,|B|\}$.
Dunque, sempre nell'ipotesi che $max\{|A|,|B|\}$ sia una cardinalità infinita, tutte queste disuguaglianze sono in effetti uguaglianze, cioè
$max\{|A|,|B|\} = (|A|+|B|) = (max\{|A|,|B|\}+max\{|A|,|B|\}) = (|A|\times|B|) = (max\{|A|,|B|\}\times max\{|A|,|B|\})$.

… e paradosso dei gemelli

di Francesco Gibertoni Barca [1]

[*Segue dal numero 64*]

[…] Sintetizzando, un corpo massivo che dinamicamente a riposo, cioè dotato al limite solo di energia interna, ha massa non trascurabile, rallenta il suo tempo di viaggio, verso una meta molto distante, per esempio una stella, quando viaggi a velocità prossime o comunque comparabili con quella della luce. E per chi conosce il paradosso dei gemelli, l'effetto è evidente al gemello astronauta quando si ricongiunge al suo non più ora ahimè coetaneo terrestre, al ritorno dal viaggio interstellare. Il gemello astronauta si ritrova cospicuamente più giovane rispetto al terrestre. Come si vede in questo caso, non si può parlare di un vero e proprio viaggio nel tempo, poiché la linea temporale non è stata mai invertita né dal gemello sull'astronave, né dal gemello a terra; il tempo scorre per entrambi sempre in un verso, solo in modo diverso. A causa del moto relativo quasi luminare, dei due gemelli, che li porta ad essere, diciamo banalmente, su due "piani energetici" molto diversi (il gemello astronauta dovrà infatti pagare un conto molto ma molto salato al suo ritorno sulla terra per la bella "scampagnata stellare", mentre il fratello se ne stava tutto tranquillo (finanziariamente si intende), seduto ad aspettarlo senza aver speso durante il viaggio dell'altro il becco di un euro. Quindi tra i due fratelli si è semplicemente generato uno sfasamento temporale o diacronia, che attraverso la formula (si vede di seguito) della relatività ristretta, tenendo anche conto dei tempi di osservazione reciproca, si potrà poi calcolare, con estrema precisione. Il rallentamento del tempo sulla navicella spaziale dovrà poi essere pure confermato dall'aumento di massa spropositato dell'astronave e del gemello, durante il viaggio, raccordandosi perfettamente con le previsioni e i calcoli della relatività anche generale. La natura sembra quindi confermare le previsioni fatte precedentemente circa l'impossibilità reale di viaggiare nel tempo sia passato che futuro. D'altronde l'inversione temporale necessaria per fare questo (si badi bene, ora ragiono sempre nel mondo macroscopico!) finirebbe con essere in profondo contrasto con il 2° principio della termodinamica!

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

[1] gibertonibarca@hotmail.com

Considerazioni sul concetto di *wormhole*

di Paolo Di Sia [2]

[*Segue dal n. 64*]

[…] Il matematico neozelandese Roy Kerr ha trovato nel 1963 una soluzione analitica delle equazioni di campo della relatività generale di Einstein che fornisce una descrizione esatta dei buchi neri rotanti dando così un contributo rilevante nel campo dell'astrofisica. I buchi neri rotanti sono conosciuti anche come buchi neri di Kerr e la sua soluzione delle equazioni del campo è conosciuta come metrica di Kerr.
Se il buco nero è rotante si forma una singolarità, ma a forma di anello. Immergendosi in un buco nero di questo tipo si passerebbe attraverso l'anello per emergere in un altro luogo ed in un altro tempo. Questa "soluzione di Kerr" può essere considerata un esempio matematico di "macchina del tempo". A quel tempo non ci fu quasi nessuno che prendesse seriamente l'idea dei buchi neri e l'interesse della soluzione di Kerr si sviluppò solo negli anni '70, dopo che gli astronomi scoprirono quelli che sembravano essere dei veri buchi neri, sia nella nostra *Via Lattea* che nel cuore di altre galassie. Anche Kip Thorne del CalTech ha studiato negli anni '80 la situazione in modo approfondito concludendo che non vi sono effettivamente divieti nelle equazioni di Einstein per un viaggio nel tempo.

Secondo un'interpretazione della fisica quantistica ogni volta che un oggetto quantistico, come un elettrone, è di fronte ad una scelta, il mondo si divide per permettergli di accettare ognuna delle possibilità offerte. Nell'esempio più semplice l'elettrone si potrebbe trovare di fronte ad una parete con due buchi, in modo da poter attraversare un buco o un altro. In una delle versioni della realtà (un gruppo di dimensioni relative) l'elettrone attraversa il buco sulla sinistra, mentre nell'altra va attraverso il buco sulla destra. Spinta al limite questa interpretazione afferma che l'universo è scisso in copie tendenti all'infinito di se stesso, tutte variazioni su un tema di base, in cui tutti i risultati possibili di tutti i possibili "esperimenti" devono accadere in qualche luogo del "multiuniverso".

Sembrano questioni dal sapore fantascientifico e gli scrittori di fantascienza sono arrivati per primi con svariati libri in questa direzione. Ma questa idea degli universi paralleli e delle storie alternate come soluzione ai paradossi del viaggio nel tempo ha spinto molti studiosi nel mondo a lavorare in questa direzione. Ci sono però un certo numero di fattori che vanno contro la possibilità di creare macchine del tempo. Stephen Hawking ha detto spesso che se si considerano gli effetti della meccanica quantistica, la costruzione di una macchina del tempo non è possibile nel mondo reale.

La questione rimane aperta, ma il suo fascino spinge teorici puri e sperimentali a lavorare per fare sempre più chiarezza sull'argomento.

[2] disia@sci.univr.it

Pensieri in libertà

Ora, chiedo a voi, amici, se sia umano studiare la matematica, se sia possibile credere che ancora l'impegno per diffonderne l'uso abbia un senso, quando questo mondo serve altri padroni più docili e generosi. Noi siamo costretti a pesanti emarginazioni e troviamo molto difficile far capire il perché del nostro sforzo a chi vuole subito risultati sicuri ed entrate di denaro. Il vago domina, non certo le idee chiare e distinte. Mi pare, allora, che noi siamo fuori dal mondo, senza speranza di essere capiti. E i giovani vedono. (L. Corso)